



世界数学史上有一个显赫的伯努利家族。他们祖居荷兰，原籍比利时，由于家族一直信仰新教，长期受到天主教徒的迫害，于1583年迁往德国法兰克福，最后定居瑞士巴塞尔。巴塞尔与产生科学巨匠的德国和法国毗邻，从十三世纪中叶开始，就成为瑞士的文化与科学中心。蜿蜒的莱茵河穿城而过。那里有欧洲最古老的巴塞尔大学，始建于1460年。从十七世纪末至二十世纪初，伯努利家族的后裔之中人才辈出，有一百二十多位成为了科学家、教授、文学艺术家和法律、管理学者，连续三代之中陆续产生了八位数学家<sup>1</sup>，其中最著名的是雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)、约翰·伯努利(Johann Bernoulli)和丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)。



伯努利家族。左起：雅各布·伯努利，约翰·伯努利，丹尼尔·伯努利

<sup>1</sup> 梁宗巨，伯努利家族，中国大百科全书·数学，北京：中国大百科全书出版社，1988。



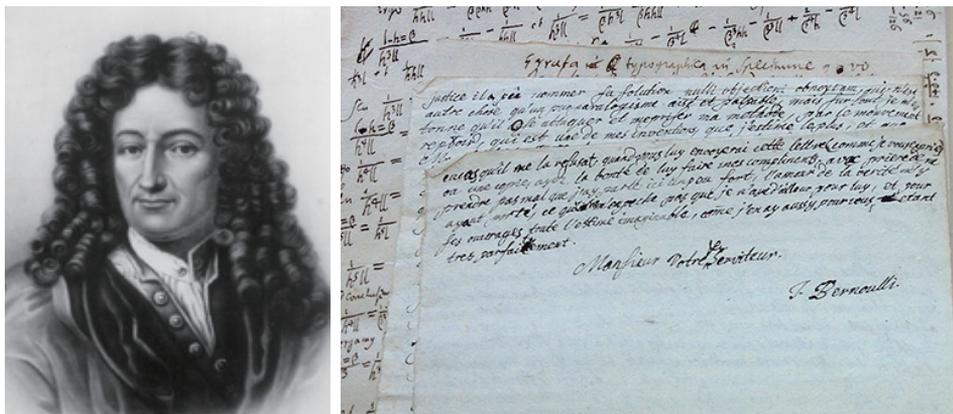
巴塞尔大学

雅各布是约翰的兄长，丹尼尔是约翰的儿子。正是这个约翰，高傲自恋，刚愎自用，心胸狭窄，为了争取自己在数学上的学术地位，与兄长和儿子之间产生了很多的不愉快，给自己的数学人生留下了不小的污点。

雅各布 1654 年 12 月 27 日出生，毕业于巴塞尔大学，取得艺术硕士和神学硕士学位，做过牧师。雅各布一生酷爱数学，他在数学上所取得的成就主要是靠自学。他精心研读过笛卡尔的《几何学》、沃利斯（John Wallis）的《无穷小算术》和巴罗（Isaac Barrow）的《几何学讲义》等经典数学著作<sup>2</sup>。1678 年，他为了更加深入地学习数学，以牧师的身份走出国门，外出游历，到过法国、荷兰、英国和德国。他一边传教，一边做着有关数学的工作，撰写了两百多篇关于数学的日志。六年后，雅各布回到巴塞尔，再也不想做神职人员，凭着在数学上的造诣，巴塞尔大学为他提供了数学教授的位置。在游历期间，雅各布结识了莱布尼茨和惠更斯这些著名的数学大师，并且长期和莱布尼茨保持着通信联系，扎实地掌握了微积分的精髓，成为莱布尼茨微积分理论的忠实捍卫者。他凭着对微积分理论的执着研究，创造性地发展了微积分理论。用“积分”一词来表述这个概念就是雅各布首先提出的，随后得到莱布尼茨的首肯<sup>2</sup>。另外，他在变分学、概率论及解析几何等方面都做出了开创性的贡献。从 1686 年至 1705 年去世前，雅各布一直担任巴塞尔大学的数学教授。大数学家欧拉的父亲曾经是他的学生。雅各布生前功名显赫，同时担任巴黎科学院外籍院士和柏林科学院协会会员。在他短暂的学术生涯中，为世界数学文献的宝库创造了十几个以伯努利家族命名的数学概念。

约翰比雅各布小十三岁。约翰进入巴塞尔大学时，最初学的是医学专业，

<sup>2</sup> 吴文俊主编，世界著名数学家传记。北京，科学出版社，2003，4。



莱布尼茨

雅各布给莱布尼茨的信件

于1694年获得博士学位。这时，雅各布已经是数学教授了。上学期间，约翰对数学怀有极大的热情，就抽出时间跟着哥哥学习数学。约翰天资聪明，利用业余时间学习了两年数学之后，就扎实地掌握了微积分的思想。在雅各布的介绍下，他也成为了莱布尼茨的学生和朋友。在莱布尼茨的影响和激励下，约翰坚定地走上了数学研究的道路，为微积分的发展作出了杰出的贡献。

函数“变量”这个概念是由约翰首先提出的。这启发他的学生欧拉创立了现代函数的定义。在牛顿和莱布尼茨的微积分优先权争辩过程中，约翰和雅各布都充当了维护莱布尼茨理论急先锋的角色。约翰非常精通莱布尼茨的理论和方法，一些用牛顿方法无法解答的问题，约翰能够创造性地运用莱布尼茨的理论给予解决。他提出的求曲面面积和曲线长度的计算方法，明显地超越了牛顿的理论。他系统地阐述了积分学理论，彻底解决了有理分式的积分法，创造了求不定式 $0/0$ 型的极限的计算法则，即洛必达法则。约翰在巴塞尔大学取得医学博士学位的论文，就是应用微积分理论研究肌肉收缩现象的，这项成就开微积分理论应用于医学之先河。约翰对数学做出的另一项令人瞩目的成就是培养了一大批出色的数学家，其中包括欧拉、克莱姆（Gabriel Cramer）、洛必达以及他自己的儿子丹尼尔和侄子尼古拉二世等。

在数学研究的起步阶段，约翰的作为自然无法和雅各布相提并论。他十分羡慕雅各布在巴塞尔大学的学术地位。另外，雅各布风流倜傥的形象还经常引来年轻女学生们仰慕的目光，这不免引起约翰的妒忌。这时，作为学生的约翰在哥哥的指导下学习数学。后来约翰有意淡化这件事情，一味强调自己的努力：“那段时间，我模仿着哥哥雅各布的兴趣，认真从事数学研究。我只用了不到两年时间，就读遍了所有数学的经典著作，还熟悉了现代大师的成果，如笛卡尔的几何学。”<sup>3</sup> 约翰于1694年获得医学博士学位后，自恃在数学上也有一定的造诣，于是，无论在私底下，还是在大庭广众面前，就开始与哥哥暗

<sup>3</sup> Johann I Bernoulli, Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, Springer Basel, 2012, 12.



雅各布墓碑

自较劲，利用各种机会夸耀自己在数学方面的研究成果，贬毁哥哥的名声。1696年，约翰给洛必达的信中写道：“你不会相信，我这个哥哥是如此沾名钓誉。他恨我，迫害我，试图摧毁我……，他看上去对我温和友好，心里却暗藏毒药。”<sup>3</sup>

雅各布对约翰的所作所为也没有容忍，而是反唇相讥，指责约翰所谓的研究成果无非是拾人牙慧，都是在自己这里学习所得。雅各布在写给莱布尼茨的一封信中明确指出，约翰的全部数学基础都来自于我的馈赠。作为老师的莱布尼茨，更加欣赏雅各布的数学才华。尽管约翰撰写了世界上第一部微积分教材，为了老师

莱布尼茨的学术荣誉立下了汗马功劳。可是，万万没有想到，莱布尼茨却公开说：微积分的思想还只有少数人掌握，我还没有听说比雅各布更精通微积分的人。约翰的自尊心因此受到极大的打击。好在约翰的妒忌心理还是有底线的，尽管他对老师的评价感到不快，但是，他一直视莱布尼茨为自己的学术偶像，对老师的任何做法，他都不会说三道四的，只有把这不满情绪发泄到对雅各布的憎恨上去。两兄弟的关系变得水火不容，在公开场合互不搭理，最终也没有能够真正缓和。

约翰太在意自己在家族中的形象，为了与雅各布较出高低，他始终觊觎着巴塞尔大学数学教授的位置。在1695年，约翰向巴塞尔大学提交了职位申请，满心以为凭借自己在数学上的名声，教授的位置唾手可得。可是，巴塞尔大学却明确表示，数学系已经拥有雅各布，不再需要任何人了。鉴于约翰在数学方面的非凡造诣，1695年，二十八岁的约翰成为了荷兰格罗宁根大学的数学教授。1699年当选为法国巴黎科学院院士。面对这些荣誉，离家万里的约翰心中总是感觉失意和落寞。雅各布对于约翰的这个行为表现出了不屑，他在给莱布尼茨的一封信中写道：“等我过世后，我弟弟肯定会回到巴塞尔。他不会接受其他职位，他只想接替我的位子”。

雅各布生前痴迷于研究各种曲线，对解析几何的发展做出了卓越的贡献。他在1694年首先引入了极坐标，将一些复杂的曲线表示成极坐标方程。例如，双纽线的极坐标方程为 $\rho = 2a^2 \cos 2\theta$ ，对数螺线的极坐标方程为 $\rho = a^{\theta 1}$ 。他尤其酷爱对数螺线，对其研究也很深入。他发现，对数螺线经过各种变换后仍然是对数螺线：如它的渐屈线和渐伸线是对数螺线，自极点至切线的垂足的轨

