



## 立交桥布局中的曲线欣赏

蒋 迅

### 1. 引言

随着高速公路建设的飞速发展，我们在日常生活中所见到的高速公路立交桥越来越多，而且式样也是越来越多。立体交叉是车辆汇集、分叉和转向的核心部分。立交桥的设计的好坏直接影响到行车速度和行车安全。

1922年，法国著名的规划思想家、现代建筑运动创始人之一勒·柯布西埃(Le Corbusier<sup>1</sup>)出版了一本《明天的城市及其规划》(*The City of To-morrow and its Planning*)，在城市规划研究中首先提出多层、高速的公路立体交叉的思想。现在，立体交叉已经从城市发展到了高速公路。高速公路上的互通式立交桥由高速公路的基本路段、立交桥、匝道、交织区、收费口、监控系统和服

务设施组成了一个综合体系。立交桥的设计不仅体现在它的科学性，也体现在它的美观性。美观的立交桥也会让驾驶员感到有所是从和有所准备，为驾驶更添一份安全因素。本文以立交桥布局设计中的曲线之美为线索，聊聊相关的数学知识，并用desmos和Wolfram Mathematica这两个数学软件制图，为读者在以后的旅途中增加一些乐趣。

在公路运输领域里，交汇处通常使用立体化和一个或多个匝道(引道)来实现至少一条高速公路上的交通能通过交叉口而不直接穿过任何其他交通车

<sup>1</sup> 维基百科, [https://en.wikipedia.org/wiki/Le\\_Corbusier](https://en.wikipedia.org/wiki/Le_Corbusier)

流。在这里，立交桥扮演着重要的角色。最常见的四方向高速公路立交桥有苜蓿叶型、环状型、涡轮型、风车型和环岛型等，另外还有它们的一些混合型<sup>2</sup>。我们来一一介绍。由于国际上有靠右和靠左行驶两套系统，而且高速公路与铁路和市区公路也有立交，以下我们只考虑靠右行驶道路并只考虑有四个方向的高速汽车公路的立交桥设计。

## 2. 苜蓿叶立交桥型

最典型的是苜蓿叶型 (cloverleaf interchange)。在这里“cloverleaf”，我们指的是“four-leaf clover”这种植物。苜蓿叶型也称为四叶型和幸运草型。典型的苜蓿叶型交汇有两层，这样使得所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来避免，也就是说，让左转车辆行驶约 270 度的环道后自右侧切向汇入高速公路。这四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状。苜蓿叶型的优点在于它只需要一个立交桥，也就是两层交通。因此建设经费较少。但是这些交叉口占地面积大，路线迂回较长。更严重的是两环间的路段也容易形成交织路段，直行车辆易受转向车辆干扰，影响了高速公路的运载能力。笔者曾经遇到一位老年妇女在直行道上想上环形匝道却又无法上去结果停在了直路中间，结果躲闪不及而追尾。

这种立交桥最早是美国新泽西州 Woodbridge 的两条道路交叉处。这也是世界上的第一座立交桥。该立交的平均通量为每昼夜达 62500 辆，高峰小时交通量达 6074 辆，即每分钟大约可容许 100 辆汽车通过。苜蓿叶式在全世界各地都很多。比如下面的南京绕城高速和玄武大道立交 (图 1(b))。

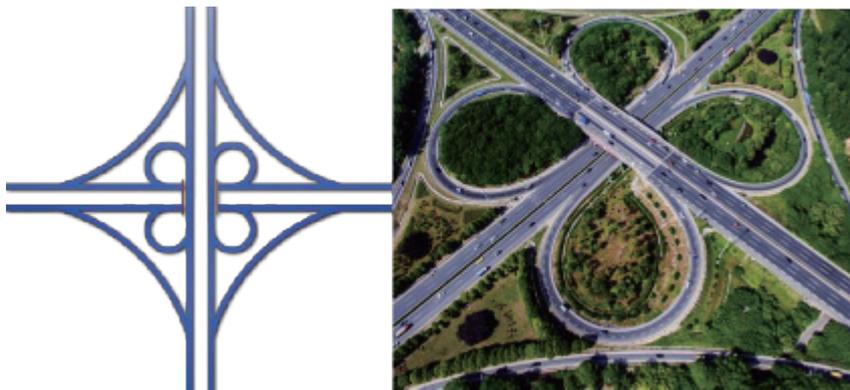


图 1. (a) 苜蓿叶型立交桥的布局 (b) 南京玄武大道立交

植物学上，“clover”是三叶草。在西方很多国家（如英国、美国）长有四片叶子的三叶草。四叶草是三叶草的稀有变种 (图 2(a))。据说大约一万至十万株三叶草中才会有一株是四叶的。西方人认为能找到四叶草是幸运的表现，在

<sup>2</sup> 维基百科: [https://en.wikipedia.org/wiki/Interchange\\_%28road%29](https://en.wikipedia.org/wiki/Interchange_%28road%29)

日本则认为会得到幸福，所以又称“幸运草”。人们对这四片叶子也赋予了含义。有一种说法是：第一片叶子代表希望（hope）、第二片叶子表示信心（faith）、第三片叶子是爱情（love）、而多出来的第四片叶子则是幸运（luck）的象征。

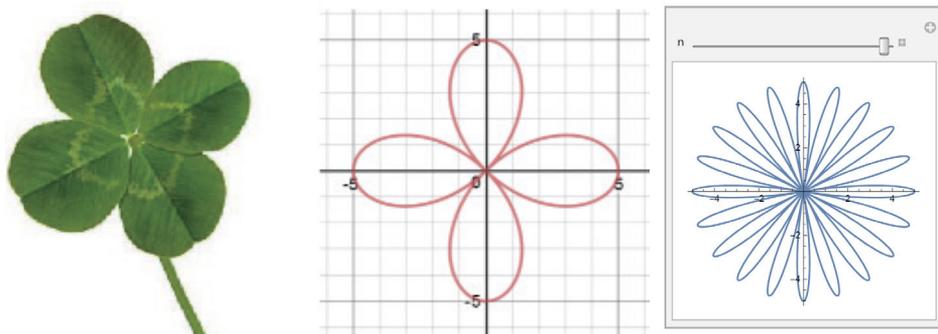


图 2. (a) 四叶草 (b) 四叶玫瑰线 (c)  $r = 5\cos(n\theta)$

数学上，我们把这样的曲线叫做“四叶玫瑰线”（*Quadrifolium*<sup>3</sup>）。它是由极坐标方程  $r = a\cos(2\theta)$  生成的。显然这是当  $n = 2$  时的玫瑰线  $r = a\cos(n\theta)$ 。我们可以很容易地将“四叶玫瑰线”的极坐标方程转换成直角坐标方程  $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$ 。所以它是一个几何亏格为零的代数曲线。但如果我们需要计算它所包含的面积的话，那么还是采用极坐标来计算为宜：

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \sin(2\theta)]^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} [\sin(2\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

当我们考虑曲线的长度时，则需要用到第二类椭圆积分了。在这里我们只给它的近似值： $s = 9.86884 \cdots a$ 。有人说它像是中国结，也有道理。Wolfram Mathematica 的表达式是 `PolarPlot[Cos[2t], {t,0,2Pi}]` 建议读者到 [desmos](https://www.desmos.com) 网站上去做出  $r = 5\cos(2\theta)$  的图像并让  $n$  变动起来，看看能得到一些什么图像。用 Wolfram Mathematica 做动态模拟时的表达式为：

```
Manipulate[PolarPlot[5Cos[nt], {t,0,2Pi}, PlotRange -> 5], {n,1,10}]
```

图 2(c) 是它的效果图。

### 3. 环状型立交桥

第二种立交桥是环状型（*stack interchange*）。环状型也称为定向式（*directional interchange*）。中文的“环状”与英文的“*stack interchange*”并没有直接的联系。“*stack*”的意思是堆，叠加的意思。取这个名字是因为环状型

<sup>3</sup> 维基百科，<https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrifolium>