

数学的印象

小平邦彦 (Kunihiko Kodaira) / 文 尤斌斌 / 译

编者按：本文选自小平邦彦著《情者集：数感与数学》（图灵新知丛书，人民邮电出版社2017出版，尤斌斌译）第一章。原文出自1969年5月出版，赤根也、前原昭二和村田全编的《数学的建议》（日文）一书。

《情者集：数感与数学》为小平邦彦的思想随笔文集，书中收录了小平邦彦对数学、数学教育的深思感悟文章，记述了数学家对“数学”“数感”的独到理解，文笔幽默，深入浅出。同时，书中还辑录了小平邦彦先生在普林斯顿高等研究院时期，与赫尔曼·外尔等数学大家交流的趣闻轶事，对深入理解数学、数学教育具有深刻启示。

数学是什么，这说不清道不明。不过，每一个对数学感兴趣的人多多少少都有各自的见解。在本文中，我会坦率地讲述数学家眼中的数学印象，比如像我这样专门研究数学的数学家是如何看待数学的，以便为读者提供参考。

人们通常认为数学是一门由严密逻辑所构建的学问，即便不是与逻辑完全一致，也大致相同。实际上，数学与逻辑并没有多大关系。当然，数学必须遵循逻辑。不过，逻辑对于数学的作用类似于语法对于文学。书写符合语法的文章与用语法编织语言、创作小说是截然不同的。同样，依照逻辑进行推论与使用逻辑构筑数学理论也并非同一层面上的事情。

任何人都能理解一般逻辑，如果将数学归为逻辑，那么任何人都能理解数学。然而众所周知，无法理解数学的初中生或高中生大有人在，语言能力优异、数学能力不足的学生十分常见。因此我认为，数学在本质上与逻辑不同。

数 感

我们试着思考数学之外的自然科学，比如说物理学。物理学研究的是自然现象中的物理现象，同理可得，数学研究的是自然现象中的数学现象。那么，



小平邦彦



小平邦彦著《惰者集：数感与数学》《微积分入门》修订版的中译本

理解数学相当于“观察”数学现象。这里所说的“观察”不是指“用眼观看”，而是通过一定感觉所形成的感知。虽然很难用言语去描述这种感觉，不过这是一种明显不同于逻辑推理能力的纯粹的感觉，在我看来这种感知几乎接近于视觉。或许我们可以称之为直觉，不过为了凸显其纯粹性，在接下来的表述中，我将其称为“数感”。直觉一词含有“瞬间领悟真相”的意思，所以不太合适。数感的敏锐性类似于听觉的敏锐性，也就是说基本上与是否聪明无关（本质上无关，但不意味着没有统计关联）。不过数学的理解需要凭借数感，正如乐感不好的人无法理解音乐，数感不好的人同样无法理解数学（给不擅长数学的孩子当家教时，就能明白这种感觉。对你来说已经显而易见的问题，在不擅长数学的孩子看来却怎么也无法理解，因此你会苦于不知如何解释）。

在证明定理时，数学家并没有察觉自己的数感发挥了作用，因此会以为是按照缜密的逻辑进行了证明。其实，只要用形式逻辑符号去解析证明，数学家就会发现事实并非如此。因为这样最终只会得到一串冗长的逻辑符号，实际上完全不可能证明定理（当然我的重点并不在于指责证明过程的逻辑不够严密，而是在于指出数感能帮助我们省略逻辑推理这个过程，直接引导我们走向前方）。近来经常听到人们在讨论数学感觉，可以说数学感觉的基础正是数感。所有数学家天生都具有敏锐的数感，只是自己没有察觉而已。

数学同样以自然现象为研究对象

也许有人认为将自然现象的一部分作为数学的研究对象太过鲁莽。但是，正如数学家在证明新的定理时，通常不会说“发明”了定理，而是表达为“发现”了定理。由此可见，数学现象与物理现象一样，都是自然界中的固有之物。我也证明过几个新定理，但我从来不觉得那些定理是自己想出来的。这些定理



外尔将菲尔兹奖颁发给小平邦彦

一直都存在，只不过碰巧被我发现了而已。

经常会有人指出，数学对于理论物理学有着不可思议的奇妙作用。甚至会让人产生一种观念，以为所有物理现象都需要依托数学法则而存在。而且，大部分情况下，在物理学理论被发现之前，数学家们早就准备好了该理论所需的数学知识。黎曼空间对于爱因斯坦广义相对论的作用就是最好的例子。为什么数学对物理学的作用如此之大？当然，只要解释说数学是物理学的语言，这个话题就到此为止了。比如，广义相对论中黎曼空间的作用的确可以说是一种语言，但是数学对于量子力学的作用却堪称是一种神秘的魔法，无法单纯将其视为一种语言。打开量子力学的教材，首先是关于光干涉、电子散射等实验的说明，接着是用波函数（即希尔伯特空间中的矢量）来描述光子、电子等粒子的状态，最后推出态叠加原理。态叠加原理是量子力学中的基本原理，它表达了如果状态 A 是状态 B 与状态 C 的叠加，那么 A 的波函数是 B 的波函数与 C 的波函数的线性组合。

什么是粒子的状态？例如，粒子加速器中电子的状态由粒子加速器决定，所以粒子的状态可以理解成粒子所在的环境。在量子力学中，极复杂的环境也只由一个波函数（矢量）来描述，因此首先需对环境进行简化和数学化。如何理解状态 A 是状态 B 与状态 C 的叠加？如果是教材中的光干涉等情况，那么就比较容易理解。不过，在通常情况下说环境 A 是环境 B 与环境 C 的叠加，这就不容易理解了。不确定性原理，例如不可能同时测量一个粒子的位置和它的速度，是通过测量实验对粒子的干扰来加以说明的，最终表明一个粒子无法同时存在于测量位置的装置和测量速度的装置中。换言之，即粒子不可能同时