数图无间——神奇的 15[1]

数依图则名，图循数则灵

张跃辉　李吉有　朱佳俊

1. 数图无间——正定二次型与晶格

与正定二次型或正定矩阵密切关联的是晶体。大家知道，固体可分为晶体、非晶体与准晶体三大类。晶体中原子的空间架构称为晶格，位于同一平面的原子则构成晶面。从几何学的观点看，晶格与晶面分别是空间中与平面上的“点格”或简称为“格”，英文为 lattice，故一般将一个格记为“L”。

直线上的格 L 就是距离为定值 $d>0$ 的点集，即公差非 0 的等差数列，故直线上的格的一般形式为

$$L=\{a+nd \mid n\in\mathbb{Z}\},$$

其中 $a, d\neq 0$ 是任何给定的实数。

平面上最简单的格 L 是所有整数点（即横纵坐标均为整数的点）形成的集合 $L=\{(x, y)^T \mid x, y\in\mathbb{Z}\}$，一般将其记为 $\mathbb{Z}^2$，或者写成

$$\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2=\{me_1+ne_2 \mid m, n\in\mathbb{Z}\},$$

其中 $e_1=(1, 0)^T$, $e_2=(0, 1)^T$。

$\mathbb{R}^n$ 中最简单的格是 $\mathbb{Z}^n=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2+\cdots+\mathbb{Z}e_n$，即所有整数格点构成的集合，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的最简单的一组基，在该组基下向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 的范数恰好是最简单的 n 元正定二次型 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$。向量的范数在不同的基下有不同的表达形式，因此表达同一个格 L 的范数实际上有无限多种正定二次型，相应地也有无限多个正定矩阵。这些正定二次型或正定矩阵称为格 L 的二

[1] 本文节录自《数学的天空》（张跃辉，李吉有，朱佳俊著，北京大学出版社，2017 年 7 月）第二章第五节“数图无间——神奇的 15”，感谢北京大学出版社授权转载。

次型或矩阵。对应于同一个格的二次型或矩阵称为等价的二次型或矩阵，比如 x^2+y^2 与 $5x^2-6xy+2y^2$ 是等价的二次型，而单位矩阵与 $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 是等价的矩阵。因此可以认为几何上的格与等价的正定二次型（或等价的正定矩阵）是一回事。研究正定二次型等价于研究格，也等价于研究正定矩阵！这正是约翰 • 康威（John Horton Conway, 1937-）证明“神奇的 15”——现代版拉格朗日“四平方定理”——的思想。

回忆第一章最后一节，拉格朗日四平方定理是指四元多项式 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 可以表达任何正整数 n，即方程 $n=x^2+y^2+z^2+w^2$ 存在自然数解。我们当然要问，还有哪些四元多项式可以表示任何正整数？这样的多项式称为万能多项式（universal polynomial）。因此，拉格朗日四平方定理等价于说四元多项式 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 是万能多项式。按照第一章费马平方和定理以及勒让德三平方定理，二元二次多项式与三元二次多项式都不可能是万能多项式。

以下将四元多项式 $ax^2+by^2+cz^2+dw^2$ 简记为 $[a; b; c; d]$。历史上第一个给出“所有”形如 $[a; b; c; d]$ 的万能多项式的是印度数学家拉玛努金 [2]。拉玛努金 1916 年宣称共有如下 55 个这样的万能多项式：

[1; 1; 1; 1], [1; 1; 1; 2], [1; 1; 1; 3], [1; 1; 1; 4], [1; 1; 1; 5],
[1; 1; 1; 6], [1; 1; 1; 7], [1; 1; 2; 2], [1; 1; 2; 3], [1; 1; 2; 4],
[1; 1; 2; 5], [1; 1; 2; 6], [1; 1; 2; 7], [1; 1; 2; 8], [1; 1; 2; 9],
[1; 1; 2; 10], [1; 1; 2; 11], [1; 1; 2; 12], [1; 1; 2; 13], [1; 1; 2; 14],
[1; 1; 3; 3], [1; 1; 3; 4], [1; 1; 3; 5], [1; 1; 3; 6], [1; 2; 2; 2],
[1; 2; 2; 3], [1; 2; 2; 4], [1; 2; 2; 5], [1; 2; 2; 6], [1; 2; 2; 7],
[1; 2; 3; 3], [1; 2; 3; 4], [1; 2; 3; 5], [1; 2; 3; 6], [1; 2; 3; 7],
[1; 2; 3; 8], [1; 2; 3; 9], [1; 2; 3; 10], [1; 2; 4; 4], [1; 2; 4; 5],
[1; 2; 4; 6], [1; 2; 4; 7], [1; 2; 4; 8], [1; 2; 4; 9], [1; 2; 4; 10],
[1; 2; 4; 11], [1; 2; 4; 12], [1; 2; 4; 13], [1; 2; 4; 14], [1; 2; 5; 5],
[1; 2; 5; 6], [1; 2; 5; 7], [1; 2; 5; 8], [1; 2; 5; 9], [1; 2; 5; 10]

然而，下面将看到，[1; 2; 5; 5] 不是万能多项式！但是，全世界的人都相信拉玛努金的万能多项式的列表是正确的！因为，拉玛努金的合作者、剑桥大学教授哈代 [3] 对其的评价是：

[2] Srinivasa Ramanujan, 1887-1920，印度著名数学天才，由 Springer 出版的国际数学期刊 The Ramanujan Journal 即以其名字命名。从 2011 年始，每年的 12 月 22 日是印度的法定国家假日，2012 年被印度政府确定为印度的国家数学年。印度的数学奖 SASTRA Ramanujan Prize 和国际数学奖 The Ramanujan Prize 以其名字命名。前者获奖年龄限制为 32 岁以下，后者 45 岁以下。

[3] Godfrey Harold Hardy，1877 -1947，著名英国数学家，华罗庚、拉玛努金的老师。

哈代 =25 分，利特伍德 =30 分，希尔伯特 =80 分，拉玛努金 =100 分！

要知道哈代是其时代英国最伟大的数学家，利特伍德是 1905 年剑桥三一学院的 Senior Wrangler（被认为是天下第一难考试 Mathematical Tripos——数学学士荣誉考试——的第一名）以及哈代一生的合作者，而希尔伯特则是全世界数学家公认的数学“无冕之王”！ 哈代眼中的拉玛努金就是数学界的神！

1909 年，拉玛努金的第一篇论文发表在“印度数学会会刊”（*Journal of Indian Mathematical Society*）。在该论文中，他提出以下征解问题：

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=?$$

大概没人会想到拉玛努金的这个公式会在 100 年后出现在中国广州恒大足球俱乐部的海报之中（如图）！

然而拉玛努金苦等了六个月，没有人能够给出正确答案，所以他只好亲自动手：答案是 3。因为，拉玛努金发现了下面的恒等式：

$$x+n+a=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{\cdots}}}.$$

于是取 $x=2$, $n=1$, $a=0$ 即可。

1913 年，拉玛努金受哈代邀请访问剑桥大学。期间，哈代去医院看望拉玛努金。哈代回忆说：

I had ridden in taxi cab number 1729 and remarked that the number seemed to me rather a dull one, and that I hoped it was not an unfavorable omen. "No," he replied, "it is a very interesting number; it is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways. "

哈代对（躺在病床上的）拉玛努金说：“我乘坐的出租车的车牌号是