数学人书评

《无穷的画廊》，一本让父子一起学习的书

蒋 迅

在 reddit 上看到有人问："8 岁的侄女问什么是无穷" 该如何回答？我第一个想到的就是《无穷的画廊》。当然对 8 岁学童提出的这种问题不必过于认真，但随着年龄的增长，无穷的概念势必需要一个解答。而能否理解无穷的概念是区分一个人是否具有数学思维的一个关键。让我们再看一下这位大人是如何回答的：

大人：你觉得呢？

小孩：我觉得是一个数。

大人：无穷就是像地球上的沙粒一样多。

如果我们不担心 8 岁小孩错误地理解无穷的话（她将来还有机会学习），那么我们对大人的这种回答真应该担忧了。显然，他的回答是错误的，而这样的回答可能在地球的各个角落里还有很多。好在我们有了美国数学会出版的

《无穷的画廊》。

《无穷的画廊》的作者理查德·伊万·施瓦茨(Richard Evan Schwartz, 1966-）是美国数学家，布朗大学数学教授。他为了教女儿学习数学而创作了这部作品。无穷的画廊是数学家对无穷多种无穷大小的独特视角。它以俏皮而又丰富的信息风格编写，引入了集合论的重要概念，包括康托尔对角线方法和康托尔 - 伯恩斯坦定理等。文字简洁、丝丝入扣，特别是把大量的信息蕴藏在彩色图片中，几乎没有公式。作者试图由浅入深，循序渐进，因此不管读者有什么样的背景，都可以找到自己能理解的范围。其结果是，它适合任何对无穷有兴趣的人，从中学生到具有好奇心的成年人。如果小孩能与大人一起读这本书的话，那么一定可以走得更远些。

我们必须指出，无穷这个概念是很有难度的。虽然本书中文字不多，但这不是一本可以快速阅读的书。你需要往返重复，多次阅读，以建立前后内容的联系。注意后面的内容远超中学生的水平，但本书通过具有创意的展示能激发读者的兴趣，为数学家与缺乏数学训练的好奇者之间形成良好交流建立了一个通道。不管受教育的背景如何，只要读者对无穷有兴趣，那么本书就能捕获他的心。

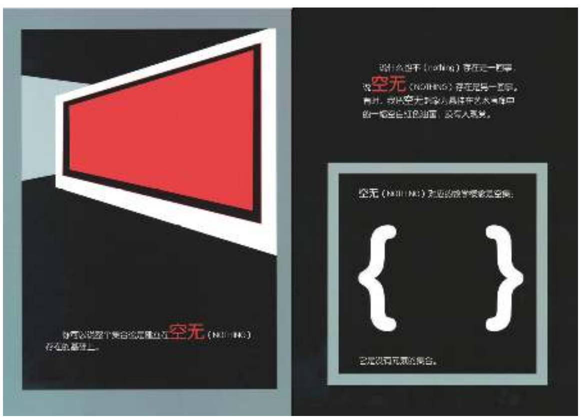
本书不分章节，没有页码。但层次还是清楚地由浅入深，一一展开。下面我们一起来欣赏一些精彩的例子。为了叙述方便，我在引用图片时增加了页码。

首先，作者以各种例子来描述有限集合。在这部分我喜欢下面一页：

数学人书评

第 14-15 页

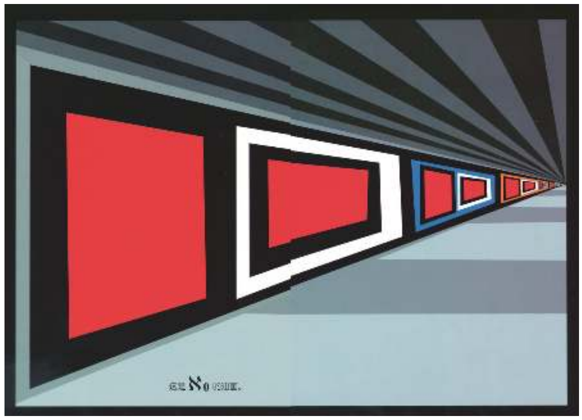
作者举的例子是地球上全部分子的集合。这听起来特别像我们前面提到的地球上的全部沙粒。显然分子的集合比沙粒的集合要大。但即使像这样的集合仍然是有限的。另外，这个例子为后面的原子链和电子云的推出打下伏笔。注意作者在这里说的一句话：“从更小的尺度来看，我们根本没有有关物理实体的体验。我们只有数学模型，……”



第 28-29 页

在数学上有一个特别的集合：空集。这个集合很特别。对于没有数学训练的读者可能有一点挑战。作者用空无的画廊介绍了这个概念。

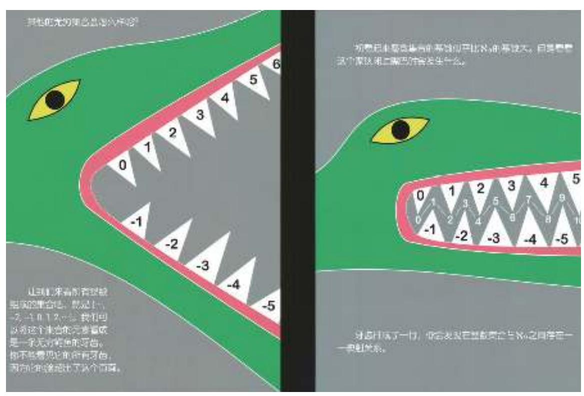
介绍完空集后，下面一个概念就是本书的核心：无穷。我们看到下图就是本书封面的图片。



第 56-57 页

作者画的是一个（可数）无穷多镜框的无穷画廊。不过，这里要特别注意的是，作者画的是一幅包含这个画廊中所有的镜框的画框。这幅画就是 $\aleph_0$（希伯来字母 Aleph，连同后面的下标 0 一起发音 Aleph Nought 或 Aleph Naught）。数学上，$\aleph_0$ 不是一个数字，而是描述的一种集合。注意事物一到了无穷，违背常识的事情就要发生了。希尔伯特用了一个无穷旅馆来做比喻，这与无穷画廊有异曲同工之妙。作者又举了一只有无穷多牙齿的小鸡的例子。我们假定它的偶数个牙齿都掉了，然后我们为它整形，就能让它的牙齿完好如初。

这个时候如果你已经感觉有些难度了的话，可能需要重新阅读一下或请教一位数学家了。



第 70-71 页

为了解决这个看似矛盾的事情，康托尔（Georg Cantor, 1845-1918）引入了基数。上图是一只具有无穷多牙齿的鳄鱼。是的，我们的奇怪现象都发生在这种奇怪的动物身上。作者通过这张鳄鱼图片解释了基数。所有整数的集合的基数与 $\aleph_0$ 的基数是相同的。同样地，作者用具有无穷有理牙齿的鲨鱼说明了有理数也与 $\aleph_0$ 具有相同的基数。更为令人惊叹的是，作者甚至给出了证明！在这样的书中给出这个层次的证明是个了不起的成就。应该说一句作者提出的“小鸡原理”。这是作者自己的说法，他说还有其他说法，我不知道。但我不太喜欢这个叫法。毕竟鸡是没有牙齿的。

到这个时候我们已经学习了可数无穷。对于中学生来说，也许读到这里已经很不错了，因为我们已经知道了最小的无穷集合是什么样子了。如果还想继续阅读下去，我建议再把前面的内容复读一边，特别把那个证明再认真读一遍。

第 78-79 页

现在的问题是：除了 $\aleph_0$，还有其他的无穷吗？无穷画廊的馆长的回答是：有，因为他使用康托尔的对角线法又做出了一个新的镜框。如果读者已经明白了前面的证明，那么理解这个证明应该不会有问题。这个新镜框就是 $2^{\aleph_0}$；而且这个基数与 $\aleph_0$ 是不同的（作者给出了康托尔的对角线证明）。你可能会问，这个符号太复杂了，怎么不用 $\aleph_1$ 呢？这是一个好问题。答案是：基数 $2^{\aleph_0}$ 其实就是 $\aleph_1$，但是这是在一个“连续统”的假定下。我们不做深入的讨论。

作者在这里介绍了康托尔集合，有一幅很漂亮的画框。欣赏之余，也许可以跳过？我不是很肯定。

在这个时候，如果你已经感到有些吃力了，那么可以考虑止步于此。你已经很优秀了。

第 122-123 页

接下来有一个看似显眼的问题：基数 $\aleph_0$ 和基数 $2^{\aleph_0}$ 哪个大？不要想当然地认为，$2^{\aleph_0}$ 是指数，当然大。在数学里，你可不能想当然。你怎么定义什么大？你怎么确定哪个大？这都是问题。如果你开始有了这样的思维，那么你从本书收获就很大了。另外，有没有可能基数 $\aleph_0$ 大于基数 $2^{\aleph_0}$ 的同时，也有基数 $2^{\aleph_0}$ 大于基数 $\aleph_0$ 呢？康托尔 - 伯恩斯坦定理保证了这种情况不会出现；而且运用这个定理我们可以得到实数集的基数就是 $2^{\aleph_0}$（更准确地说，实数集与 $2^{\aleph_0}$ 有相同的基数）。如果读者前面略过了康托尔集的话，这里也可以略过。