

# 音乐与数学

王杰

连载（一）

音乐与数学之间有什么关系？对于这个问题也许有人会回答：这两件事情毫不相干，怎么会有关系；也有人会回答：音乐和数学好像的确有些相似的地方。但是更多的人也许从来就没有想过这个问题。

在 20 世纪 80 年代开始发掘的河南省舞阳县贾湖新石器时代遗址的墓葬群中，先后发现了数十支骨笛（图 1）。考古学家对舞阳贾湖遗址的木炭、泥炭作了碳-14 测定，又经树轮校正，得出骨笛的年代大约为公元前 7000-前 5800 年的结论<sup>1</sup>。这些骨笛大多为 7 孔，可以吹奏出完整的六声和七声音阶。不仅如此，“不少骨笛的音孔旁尚存钻孔时设计音孔位置的横线刻记。可以看出，开孔前的刻线显然是根据某种特定的比例关系计算好了的（参见图 2）<sup>2</sup>。”可见早在远古时代，音乐就已经与数学计算发生了联系。

《吕氏春秋》是秦国丞相吕不韦主编的一部中国古代的百科全书，包括八览、六论、十二纪，共二十万言。在“季夏纪第六”中记载了十二律的名称及其相生关系：



图 1. 贾湖骨笛（约公元前 7000 - 前 5800 年）

<sup>1</sup> 王子初. 中国音乐考古学, p53. 福建教育出版社, 福州, 2003.

<sup>2</sup> 童忠良. 舞阳贾湖骨笛的音孔设计与宫调特点. 中国音乐学, 1992 (3): 43-51.

图2. 带刻线的骨笛<sup>3</sup>

黄钟生林钟，林钟生太簇 (cù)，太簇生南吕，南吕生姑洗 (xiàn)，姑洗生应钟，应钟生蕤 (ruí) 宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射 (yì)，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生。三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。<sup>4</sup>

司马迁在《史记》中有如下文字：

律数：九九八十一以为宫。三分去一，五十四以为徵 (zhǐ)。三分益一，七十二以为商。三分去一，四十八以为羽。三分益一，六十四以为角 (jué)。黄钟长八寸七分一，宫。大吕长七寸五分三分一。太簇长七寸七分二，角。夹钟长六寸一分三分一。姑洗长六寸七分四，羽。仲吕长五寸九分三分二，徵。蕤宾长五寸六分三分一。林钟长五寸七分四，角。夷则长五寸四分三分二，商。南吕长四寸七分八，徵。无射长四寸四分三分二。应钟长四寸二分三分二，羽。

生钟分：子一分。丑三分二。寅九分八。卯二十七分十六。辰八十一分六十四。巳二百四十三分一百二十八。午七百二十九分五百一十二。未二千一百八十七分一千二十四。申六千五百六十一分四千九十六。西一万九千六百八十三分八千一百九十二。戌五万九千四十九分三万二千七百六十八。亥十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六。<sup>5</sup>

从上面这些文字，应该可以看出音乐与数学之间是有着某种密切联系的。在上面引用的《史记》文字中，十二地支对应的那12个数目字如果用现代符号表示，是一个由分数构成的序列



图3. 吕不韦

<sup>3</sup> 袁荃猷. 中国音乐文物大系·北京卷, p11. 大象出版社, 郑州, 1996.

<sup>4</sup> 《吕氏春秋·季夏纪第六》. 参见张双棣, 张万彬, 殷国光, 陈涛. 吕氏春秋译注(修订本), p151. 北京大学出版社, 北京, 2000.

<sup>5</sup> 《史记卷二十五·律书第三》 ([3, 第四册, p. 1249-1250]).



图 4. 司马迁

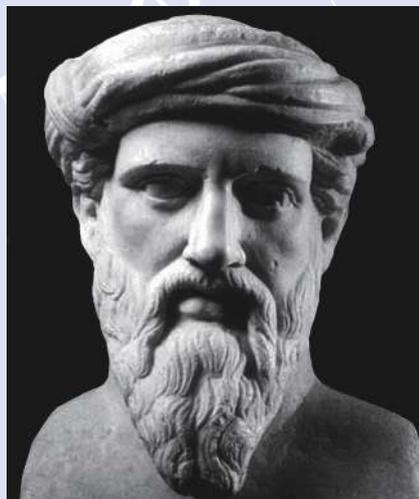


图 5. 毕达哥拉斯

$$1, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}, \frac{512}{729}, \frac{1024}{2187}, \frac{4096}{6561}, \frac{8192}{19683}, \frac{32768}{59049}, \frac{65536}{177147}. \quad (1)$$

为什么音律会与这样一些分数有关呢？这些都是所谓“律学”（temperament）研究的内容。事实上，历代文人学者，专家教授对于这些文字和数字做了无数的考证、校勘、研究乃至实验，所涉及的领域包括了音律学、数学、物理学等许多相关的学科领域。感兴趣的读者可以参看文献<sup>6,7,8</sup>以及那里列出的参考文献。

古希腊学者毕达哥拉斯相信“万物皆数”（all things are numbers）。他认为数与几何图形、与音乐的和谐、与天体的运行等等都有密切关系，所谓“四艺”（quadrivium）就是算术、几何、音乐和天文。无独有偶，中国古代的“六艺”（礼、乐、射、御、书、数）同样包含了音乐和数学。毕达哥拉斯认为音乐是数的应用，是从属于数学的学科，因为宇宙和谐的基础是完美的数的比例。当乐器两根弦的长度比例是简单的整数比时，它们同时发出的声音是和谐的。例如两根弦的长度比等于2:1时，它们发出的声音构成八度音程；而当弦的长度比分别为3:2和4:3时，发出的声音构成完美协和的纯五度和纯四度音程。

近代以来的许多著名学者都认为音乐与数学之间存在着密切的联系。

<sup>6</sup> 程贞一著，王翼勋译．黄钟大吕．上海科技教育出版社，上海，2007．

<sup>7</sup> 关晓武．也论《史记·律书》中的律数．内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），Vol. 36, no. 6: 755-758, 2007．

<sup>8</sup> 黄大同．千年聚讼的《史记·律书》律数考．文化艺术研究，Vol. 2, no.6: 118-139, 2009．