一场跨越时空的数学对话

彭 刚

开场白

从数学的历史发展来看，初等数学与高等数学之间的联系是非常紧密的。然而在当前的数学教学中，二者往往处于割裂的状态。本文以一道平面几何题的多种解法以及推广为主线，通过虚拟对话的方式，对这些解题方法的相关历史背景及其内在联系进行了初步的探讨，尝试勾画出初等数学是如何发展到高等数学的。在某种意义上，这场对话的内容可以看成是两千多年数学发展历史的一个纵向切面。

主要人物介绍

M• 克莱因：20 世纪美国数学史家和数学教育家。《古今数学思想》是他的代表作之一，论述了数学思想的古往今来，这也是选择他作为此次对话主持人的主要原因。

泰勒斯：古希腊数学家、哲学家，被誉为“论证几何学的鼻祖”。

毕达哥拉斯：古希腊数学家、哲学家，毕达哥拉斯学派的创始人，该学派信奉“万物皆数”，即万事万物都可以由整数或者整数之比来表示。

希帕苏斯：毕达哥拉斯学派成员，传说他首先发现了正方形对角线与其一边的不可公度性，而被惊恐不已的其他成员扔进了大海。

欧多克斯：古希腊天文学家和数学家，他所提出的新比例理论暂时消除了由于不可公度量的出现而引发的“数学危机”。

芝诺：古希腊数学家、哲学家，因提出了一系列关于运动不可分性的哲学悖论而闻名于世。在这些悖论中，其中一个就是“论证”了希腊善跑名将阿基里斯永远追不上一只乌龟。

欧几里得：古希腊论证几何学的集大成者，其著作《原本》对后世的影响极为深远。

艾布 • 瓦法：中世纪阿拉伯天文学家、数学家，著有《天文学大全》，证明了平面和球面三角形的正弦定理。

笛卡尔：17 世纪法国哲学家、数学家，将几何坐标体系公式化从而开创了解析几何。

关孝和：17 世纪日本数学家，在 1683 年的著作《解伏题之法》中最早提出了行列式的概念及算法。

拉格朗日：18 世纪法国数学家，数学分析的开拓者之一。

高斯：18-19 世纪德国数学家，享有“数学王子”的美誉。在历史上，高斯并不是最先给出复数的几何解释的，但是由于他的巨大影响力，人们逐渐认识到这种解释的合理性，从而沟通了复数和平面几何的联系，使得复数成为解决平面上的数学问题和物理问题的重要工具。

格拉斯曼：19 世纪德国数学家，历史上首次清晰地解释了“n 维向量空间”的概念，把 n 维向量空间的向量和与积用纯几何方法来定义，发展了通用的向量演算法。

哈密尔顿：19 世纪英国数学家，提出了著名的“四元数”；在历史上，他是第一位用“向量（vector）”这个词表示有向线段的数学家。

庞斯列：19 世纪法国数学家，他使得射影几何真正变革为一门具有独立的目标和方法的学科。

康托尔：19 世纪德国数学家，集合论创始人，认为“数学的本质在于它的自由”。

M• 克莱因：诸位，在西方文明中数学一直是一种主要的文化力量 [1]；以神圣的数学之名，我们欢聚一堂。首先有请古希腊泰勒斯先生。

泰勒斯：今天我们来探讨几何学。几何学源远流长，人类最初的几何知识从对世界万物形的直觉中萌发出来。事实上，古埃及的几何学即产生于尼罗河泛滥后土地的重新丈量，“几何学”一词的希腊文意即“测地”。[2]

古希腊时代以前的数学都以经验的积累为特征，几何学也不例外；但经验不是获取知识的唯一方法，经验也不能给人类以推理能力，我们需要一种推理方法来保证它所导出的结论具有确定性。

[1] M• 克莱因 . 西方文化中的数学 . 张祖贵 译 . 上海：复旦大学出版社，2004.

[2] 李文林 . 数学史概论 (第 2 版) . 北京：高等教育出版社，2002.

M• 克莱因：古希腊学者们所发明的推理方法就是演绎法，即从已认可的事实推导出新命题，承认这些事实就必须接受推导出的命题；而几何学便从此进入了推理几何阶段，对于各种各样几何图形的性质作系统化和深刻的分析[3]。

泰勒斯：的确如此。尽管历史学家把论证数学的开端归功于由我领导的爱奥尼亚学派，但实际上我们学派的兴趣主要还是在自然哲学方面，比如宇宙起源理论等等。关于我本人也有很多传说，比如说我早年经商，进行橄榄榨油机生意发了大财，在巴比伦我预报了公元前 585 年的一次日蚀，甚至还说我夜晚散步在全神贯注观察星星时，不小心跌到沟中成了落汤鸡——但传说毕竟是传说。

M• 克莱因：关于泰勒斯先生的传说有些还是有记载的，比如新柏拉图派哲学家普罗克鲁斯先生在其著作中便介绍说泰勒斯先生证明了下面关于三角形的一个很基本的性质：等腰三角形两底角相等。

三角形是仅次于线段和直线的最基本、最简单的几何图形，并且空间中的大部分基本性质都已经在三角形的几何性质中充分体现，因此三角形是古希腊几何学所研究的重要内容之一。

泰勒斯：不错，今天我们要探讨的几何问题便是与三角形有关：

如图 1, G 为$\triangle ABC$ 重心，过 G 的直线交 AB 于 M, 交 AC 于 N。求证：

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$$ [4]。

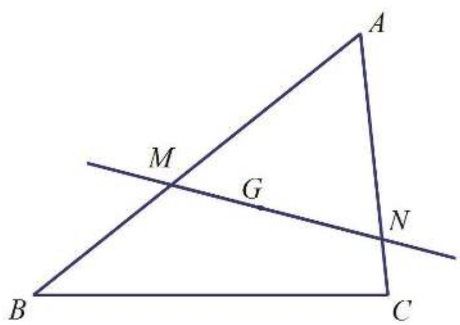

图 1

毕达哥拉斯：泰勒斯先生，正所谓万物皆数，BM 与 MA，CN 与 NA 应该均可公度！

希帕苏斯：我的名字就是一种传说，哪怕再次面临着被扔到汹涌的大海的危险，我也要说出我的发现：毕达哥拉斯先生，世上确实存在不可公度的线段！比如正方形的边长和对角线长 $\{a, b\}$ 之间的辗转丈量就是永无休止因而是不可公度的（如图 2）！

[3] 项武义．基础几何学．北京：人民教育出版社，2004.

[4] 该问题参见：http://www.cut-the-knot.org/triangle/CharacteristicPropertyOfCentroid.shtml.