

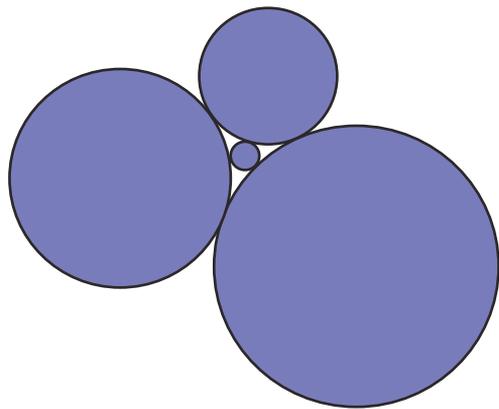
圆圆相吻

When Kissing Involves Trigonometry

David Austin (大卫·奥斯汀) / 文 丁玖 / 译

笛卡尔圆定理

在1643年写给波西米亚的伊丽莎白公主 (Princess Elizabeth of Bohemia) 的一封信中, 勒奈·笛卡尔 (René Descartes) 描述了如下图所示的四个互切圆半径之间的一种优美关系, 这个关系现以笛卡尔圆定理为名。



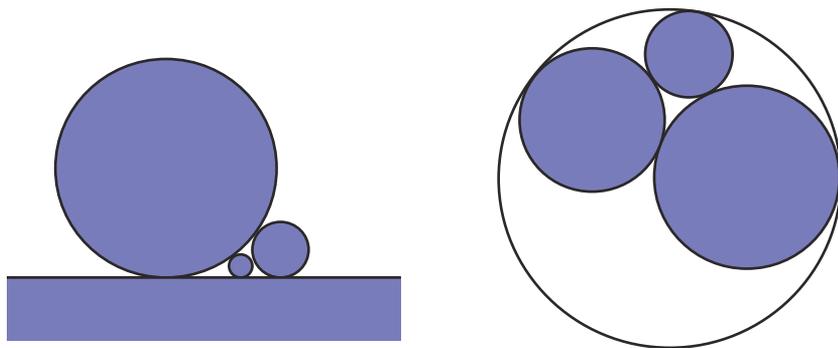
利用圆的曲率 (即圆半径的倒数), 我们能最简洁地表达笛卡尔圆定理: 将第 i 个圆的曲率记为 b_i , 则有

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2.$$

我们将一组四个互切圆称为一个笛卡尔配置 (Descartes configuration)。

笛卡尔的关系也适用于如下图所示的其他一些看似有点例外的配置。在左下图, 直线的曲率被认为是零, 而右下图中的外圆曲率被看成是负的。按照这些约定, 笛卡尔的关系仍然有效。

这个定理已数次被独立发现。例如, 在18世纪的日本它就被知道。曾因发现同位素而获得1921年诺贝尔奖的科学家弗雷德里克·索迪 (Frederick



Soddy), 也发现了它的一个证明。他对该定理如此满意, 以至于将它以一首诗的形式发表出来, 诗名为《精确之吻》(*The Kiss Precise*)。它的开头是这样的:

双唇相交之际,
或许无关三角。
四圆互吻却不然,
每个都吻另三个。

在诗歌的第三节, 索迪描述了关于五个互切球面的一个类似结果: 它们的曲率平方和等于曲率之和平方的三分之一, 即

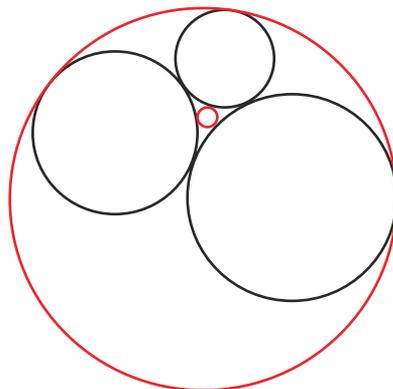
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)^2.$$

下一年, 托洛尔德·戈塞特 (Thorold Gosset) 添加了诗歌的第四节, 描述 $n+2$ 个彼此互切的 $(n-1)$ - 维球面曲率之间的关系, 即

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n+2}^2 = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_{n+2})^2.$$

交换笛卡尔配置

如果我们从三个互切圆 (下面用黑色圆圈表示) 开始, 则可以有两种方式加进红色标记的圆, 以构建笛卡尔配置。



这两个新圆曲率之间的关系可以由笛卡尔圆定理来确定。我们将原有三个圆的曲率分别记为 b_1 、 b_2 和 b_3 ，将一个笛卡尔配置中的第四个圆的曲率记为 x ，则有

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + x^2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + x)^2,$$

得到一个 x 的二次方程

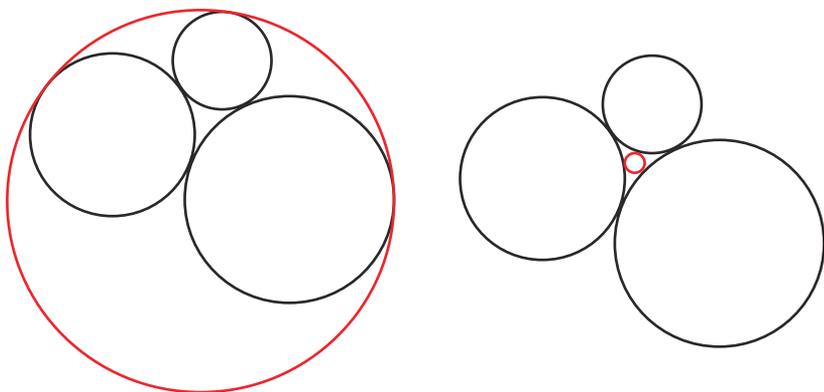
$$x^2 - 2(b_1 + b_2 + b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 0.$$

假如将方程的两个根称为 b_4 和 b_4' ，我们则发现

$$\begin{aligned} b_4 + b_4' &= 2b_1 + 2b_2 + 2b_3, \\ b_4 b_4' &= 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 - b_4. \end{aligned}$$

特别地，这给了我们一种产生新的笛卡尔配置的简易方法：从某一个配置开始，我们可以删除这些圆其中的一个，它的曲率称为 b_4 ，然后用一个曲率为 $b_4' = 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 - b_4$ 的新圆取代它。

为了用例子说明之，我们从左下图所示的笛卡尔配置开始，其中四个圆的曲率是 $(2, 2, 3, -1)$ ，而曲率为 $b_4 = -1$ 的那个圆将被取代。新圆的曲率是 $b_4' = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - (-1) = 15$ ，所得到的配置由右下图所示。



这个例子说明了另一个十分显著的事实，它也曾经被索迪注意到：由于 $b_4' = 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 - b_4$ 这个关系，如果原配置中四个圆的曲率均为整数，则新的配置中圆的曲率也为整数。

被交换的两个圆的曲率只是简单相关，而这些圆本身也通过圆的反演而简单地相关。为了描述这一过程，让我们以一个圆心为 O 的圆开始。在这个圆上反演就像在一条直线上反射：我们将点 P 送到点 P' ，使得三点 O 、 P 及 P' 共线，并且两距离 OP 和 OP' 的乘积 $OP \cdot OP'$ 等于圆半径的平方。

记住我们将直线视为曲率为零的圆，我们就可以说，圆的反演将一个圆转