音乐与数学

王 杰

连载（三）

4 和弦与音网

节奏、旋律、和声是音乐的三大要素。这一节我们来说说和声。所谓和声是指两个或两个以上不同的音按一定的法则同时发声而构成的音响组合。我们最常听到的和声是根据“三度叠置”原则构成的三和弦或者七和弦。

为了简化符号，在本节中若无特别说明，我们就省略代表等价类的上划线，直接用音名 C, D, . . . , B 来代表它们所在的音类。类似的，也直接用 0, 1, . . ., 11 代表模 12 的同余类。

4.1 三和弦与 *n*- 和弦

在 12 个音类中，从任何一个音类出发，取其上方三度和五度的音类，这三个音类合起来就构成一个三和弦。其中第一个音类称为这个三和弦的根音，中间的音类称为三音，第三个音类称作冠音。例如，C — E — G, E — G— B 都是三和弦。根据音类与 $\mathbb{Z}_{12}$ 中元素的 1-1 对应，还可以把一个三和弦表示成。$\mathbb{Z}_{12}$ 中元素的一个三元集合：

$$C — E — G = \{ 0, 4,7 \}, \qquad E — G— B = \{ 4,7, 11 \}.$$

在音乐上，三度音程有大小之分，相应地，三和弦也有大小之分。根音到三音是大三度（4 个半音）的称作大三和弦；根音到三音是小三度（3 个半音）的称作小三和弦。于是上面提到的 C — E — G 就是大三和弦，E — G — B 是小三和弦。 注意不论是大三和弦还是小三和弦，根音到冠音都是纯五度音程。

把任意一个音类当做根音，都可以构造出一个大三和弦和一个小三和弦，所以总共有 24 个大、小三和弦，列在表 3 中。其中，大写字母 C, ♯C, D, . . ., B 分别代表以该音类为根音的大三和弦，小写字母 c, ♯c, d, . . ., b 分别代表以

$C = \{0, 4, 7\}$	$\sharp C = {}^\flat D = \{1, 5, 8\}$	$D = \{2, 6, 9\}$
$\sharp D = {}^\flat E = \{3, 7, 10\}$	$E = \{4, 8, 11\}$	$F = \{5, 9, 0\}$
$\sharp F = {}^\flat G = \{6, 10, 1\}$	$G = \{7, 11, 2\}$	$\sharp G = {}^\flat A = \{8, 0, 3\}$
$A = \{9, 1, 4\}$	$\sharp A = {}^\flat B = \{10, 2, 5\}$	$B = \{11, 3, 6\}$
$c = \{0, 3, 7\}$	$\sharp c = {}^\flat d = \{1, 4, 8\}$	$d = \{2, 5, 9\}$
$\sharp d = {}^\flat e = \{3, 6, 10\}$	$e = \{4, 7, 11\}$	$f = \{5, 8, 0\}$
$\sharp f = {}^\flat g = \{6, 9, 1\}$	$g = \{7, 10, 2\}$	$\sharp g = {}^\flat a = \{8, 11, 3\}$
$a = \{9, 0, 4\}$	$\sharp a = {}^\flat b = \{10, 1, 5\}$	$b = \{11, 2, 6\}$

表 3. 大、小三和弦

该音类为根音的小三和弦。

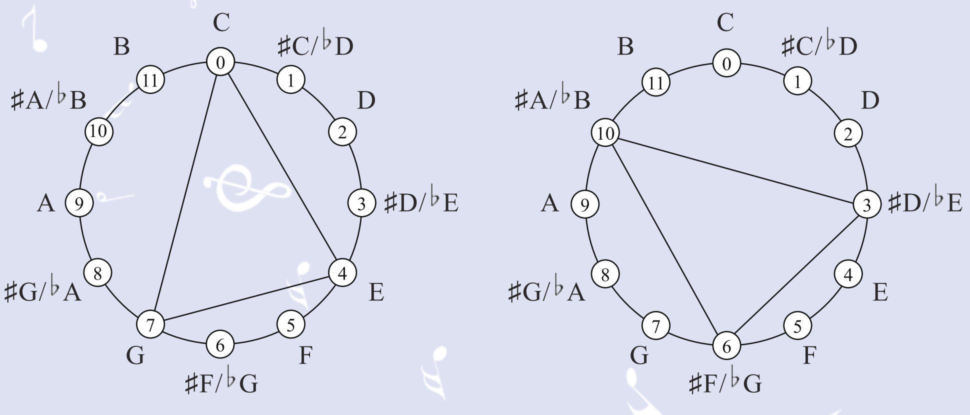
在音类圆周上，构成三和弦的三个音类分别表示成三个点，把这三个点联结起来就得到音类圆周的一个内接三角形，如图 1 所示。由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的群

$$\mathscr{D} = \langle T, I \rangle \cong D_{24}$$

作用在音类圆周上，诱导出 $\mathscr{D}$ 在 24 个大、小三和弦构成的集合上的一个作用。不难证明，移调变换总是把大三和弦变成大三和弦，小三和弦变成小三和弦；

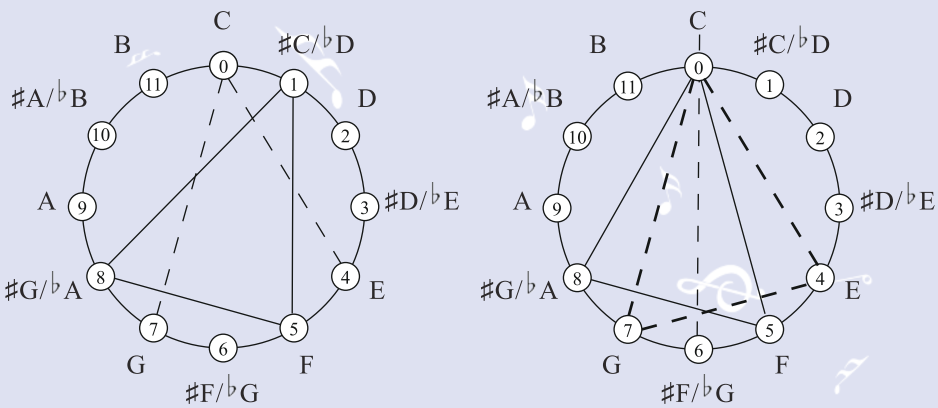
而倒影变换则把大、小三和弦互换（参见图 2）。

三和弦是根据所谓三度叠置原则构造而成的。如果进一步在三和弦的五音上再叠置一个三度音，这样的四个音的组合就构成一个七和弦。三和弦、七和弦及其转位构成了传统调性和声的基础。



(a) 大三和弦 $C = \{0, 4, 7\}$ (b) 小三和弦 $\sharp d = \{3, 6, 10\}$

图 1. 音类圆周上的三和弦



(a) 移调变换 T : C $\mapsto$ ♯C　　　　(b) 倒影变换 I : C $\mapsto$ f

图 2. 群 $\mathscr{D}$ 在大、小三和弦上的作用

从十九世纪后半开始，不断有音乐家努力探索实践，力图在传统调性音乐的基础上有所创新，有所突破。在这样的探索过程中，和弦的调性功能越来越弱化，和弦的色彩和声音效果越来越受到重视，逐渐发展出许多不同于传统和弦的、特色鲜明的声高组合（pitch combination）。这就极大地丰富了可供作曲家用于创作的音乐语汇。另一方面，如何梳理、归纳这些音高组合，如何分析研究二十世纪发展起来的无调性乃至后调性音乐，这就需要引入新的理论和新的工具。音乐集合理论（musical set theory）便应运而生了。

现代的音乐集合理论在传统和弦概念的基础上推进了一大步，考虑一般的 n- 和弦。一个 n- 和弦就是音类空间 $\mathscr{PC}$ 中的一个 n- 元子集合。n- 和弦的概念突破了传统和弦“三度叠置”的构成法则，于是大大地增加了和弦的数目。例如，现在的 3- 和弦就是 $\mathscr{PC}$ 中的 3- 元子集，因此一共有 220 个 3- 和弦！这么大数目的 n- 和弦需要有方法将它们分门别类，才好应用。

在音类圆周上，一个 n- 和弦表现为一个内接 n- 边形。变换群 $\mathscr{D}$ 同样可以作用在 n- 和弦的集合上。于是对给定的 n，所有的 n- 和弦就在群 $\mathscr{D}$ 的作用下分成若干等价类（轨道）。音乐理论家们就这样对 n- 和弦做了分类。进一步，还规定了如何在每个等价类中选取一个代表元素——基本型（prime form）。在艾伦 • 福特的《无调性音乐的结构》[1] 一书的附录中，他列出了一个包含所有非平凡的 n- 和弦的等价类及其基本型的音类集合表（The list of pitch class sets）。例如，由 24 个大三和弦和 24 个小三和弦构成的等价类，在表中的编号为 3-11，其基本型为 [0, 3, 7]，即小三和弦 c = {C, ♭E, G}。

[1] Allen Forte. *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press, New Haven, 1973. 中译本：无调性音乐的结构，罗忠镕译，上海音乐出版社，上海，2009.

音类圆周上的 n- 边形具有不同的对称性，从而在变换群 $\mathscr{D}$ 的作用下，其轨道的长度是不同的。如图 3 所示的减七和弦 { E, G, ♭B, ♭D }，其图形是一个正方形，所以在 $\mathscr{D}$ 中的稳定化子是 8 阶的，相应的轨道长度等于 3。这说明只有 3 个互不相同的减七和弦，它们构成的等价类在音类集合表中的标号为 4-28。

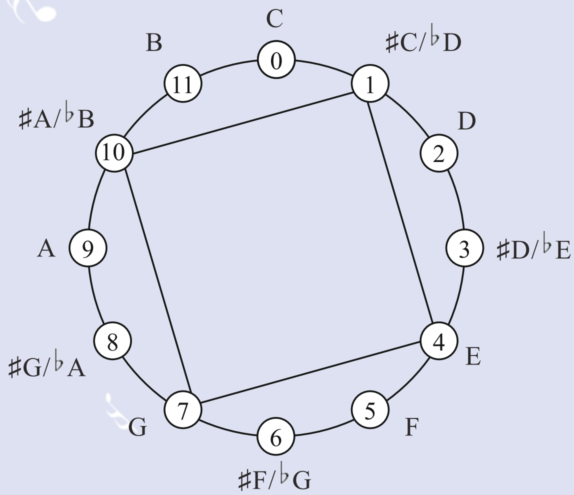
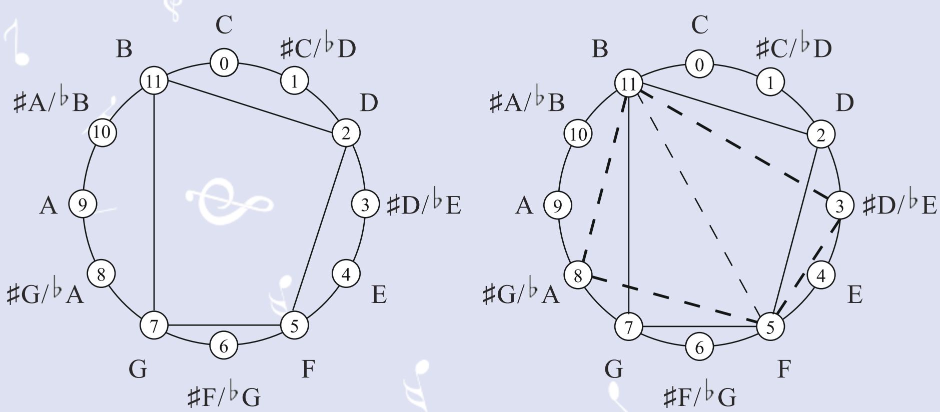


图 3. 减七和弦 E — G — B — D

图 4(a) 所示的属七和弦 {G, B, D, F} 显然没有旋转不变性，所以在移调变换 T 的作用下可以产生 12 个属七和弦。另一方面，如图 4(b) 所示，倒影变换把属七和弦 {G, B, D, F} 变成半减七和弦 { F, ♭A, ♭C, ♭E }。因此这个等价类包含 24 个七和弦，其中 12 个是属七和弦，12 个是半减七和弦。在艾伦 • 福特的音类集合表中，这个等价类被标记为 4-27。



(a) 属七和弦 G — B — D — F　　(b) 半减七和弦 F — ♭A — ♭C — ♭E

图 4. 属七和弦与半减七和弦