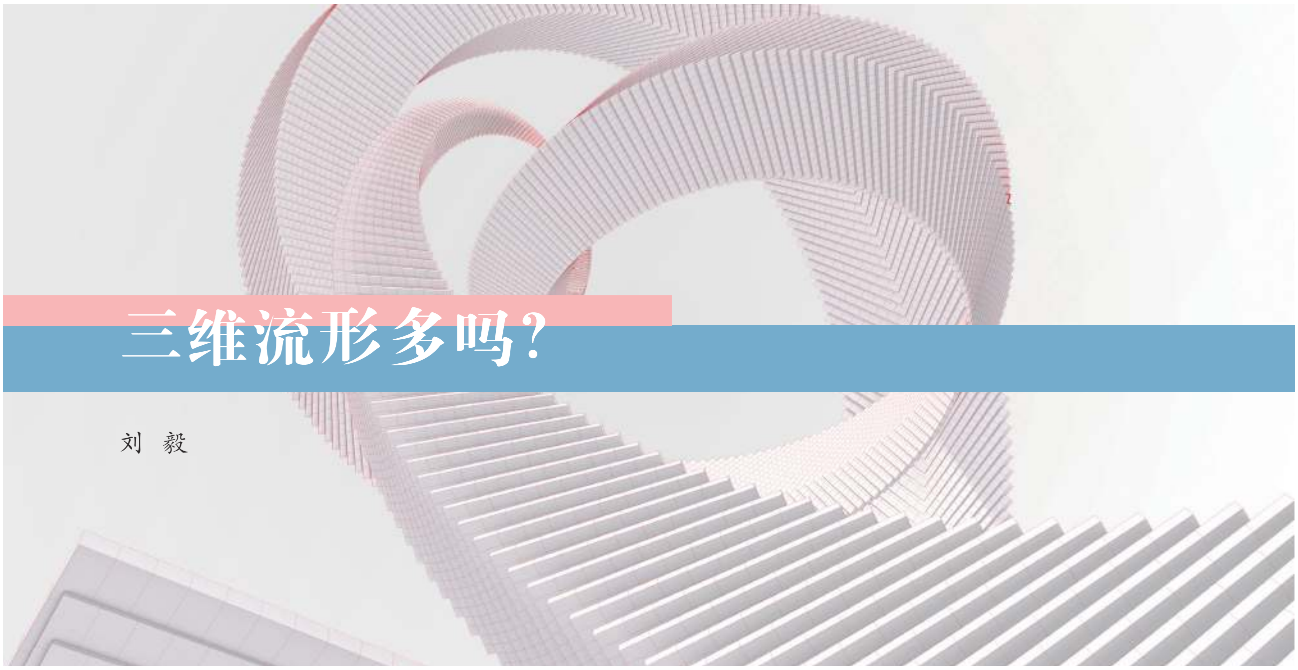


三维流形多吗？

刘 毅

人们认识流形，先于知道它的名字。放大镜下的蚕丝不会被当成蛛网，因为它处处都像线段。在玻璃球、玉镯表面，蚂蚁看着附近都像小的圆盘。我们所观瞻过的太空，无处不像立方体的内部，三维张布，尽管不能由此推断宇宙的形状。数学上，流形（manifold）正是指一类广泛的拓扑空间，它的局部总与某维数的欧氏空间相互同胚。

从庞加莱（Henri Poincaré）为之奠基的时代起，拓扑学就致力于流形的分类。维数从此造成关键的影响。百余年过去，今天的我们知道有一道认识的分水岭，横亘三维、四维之间。低维这侧是大体清晰的理论可计算图景，高维之外是原则上不可能解决的、更辽阔的未知。

本文打算以分类课题为叙事，介绍三维流形的几何化纲领，并且提及它所影响的低维拓扑在后来的重要发展。

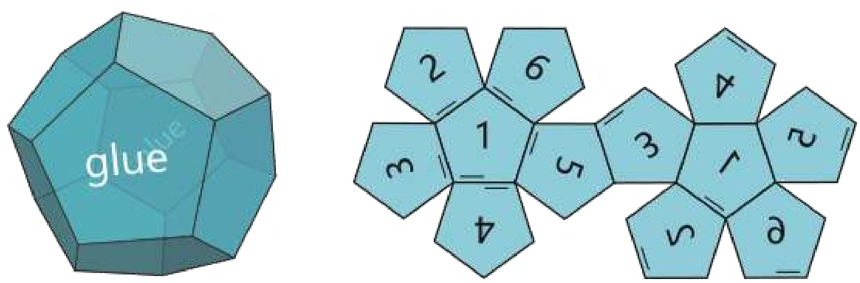
球

让我们从最普通的球讲起。

任意维欧氏空间里都有低一维的、浑圆的球（sphere），它们是到定点距离等于定长的那些点集。二维的球平时就叫球面，一维不过是圆圈。惯常所说的“球体（ball）”，或者说实心球，实际上只是半个真正的三维球，就如同北半球面之于整个地球表面一样。三维往上的球固然超乎直观，我们还是可以依靠数学，类比它们的性质。早在古希腊，欧几里得已经在《现象》一书中利用球面几何的技巧。托勒

密模型将天空分作同心九重的球套。1500 年前后的航海家们凭借四分仪和罗盘，穿过好望角、火地岛险恶的波涛。人们与球打交道的日子是那样长，对它的了解却未必有想象的那样透彻。翻开一部拓扑学史，球的故事甚至连成一串脚印，一直要延伸到还没有开垦的前沿。

你可能尝试过把橡筋圈绷在打足气的篮球上，一松手或者一碰，它就会沿表面收缩到一处。数学的巨人庞加莱也了解这点，并且他注意到较低维的球放在高维球里，也都能连续地形变为一点。他敏锐地猜想：这种现象在拓扑学上完全刻画了球。运用今天的术语，拓扑庞加莱猜想是指对于任意给定的维数，与球同伦等价的流形也一定与球同胚。起初，庞加莱表述得并不准确，但他很快意识到反例，后世称为庞加莱同调球。这是将正十二面体的每组对面彼此粘合得到的三维流形：站在正十二面体外，沿着每根穿过一组对面中心的轴看，前方正朝我们那个面都将逆时针转 36°，接着平行粘贴到后方背对的面（图 1）。庞加莱同调球和三维球并不同胚，但它也伪装得相当巧妙。在今天，庞加莱的例子已经算是拓扑学主要课程的练习，用来展示同调群与同伦群这两种代数型不变量的基本差别。



左图展现了正十二面体一组对面的粘合方式，其余五组对面粘合的规则类似。右图是正十二面体的外表面展开图，完整标记了各组对面的粘合方式。

图 1. 庞加莱同调球

米尔诺（John Milnor）则在 1956 年发现了一个真正神奇的怪球。它和标准的七维球同胚而不光滑同胚，指彼此间存在双向连续的双射，却不存在双向光滑的双射。这也就意味着，怪球与真球上的微积分必定包藏某种整体的差别。从那个时候起，“微分拓扑”正式宣告独立，而不再仅仅是“从微分观点看拓扑”。拓扑庞加莱猜想也由此分裂出一个新的版本，叫做光滑庞加莱猜想，它在原先断言中添上了光滑的要求。虽然结论变得更强，但是米尔诺的例子表明它不能对所有维数成立。

拓扑庞加莱猜想从 1904 年提出到 2003 年变成定理，几乎走过百年。它的完成联系着一串菲尔兹奖的名字：斯梅尔（Stephen Smale）在 1961 年首先证明了七维往上的情形，他的方法很快又推广处理了六维、五维。四维情形在 1982 年由弗里德曼（Michael Freedman）证明。三维的情形是百万美金悬赏的七道千禧问题（Millennium Problems）之一，直到本世纪初才被佩雷尔曼

（Grigori Y. Perelman）猎获。其余维数的成立则是早就清楚的事实。

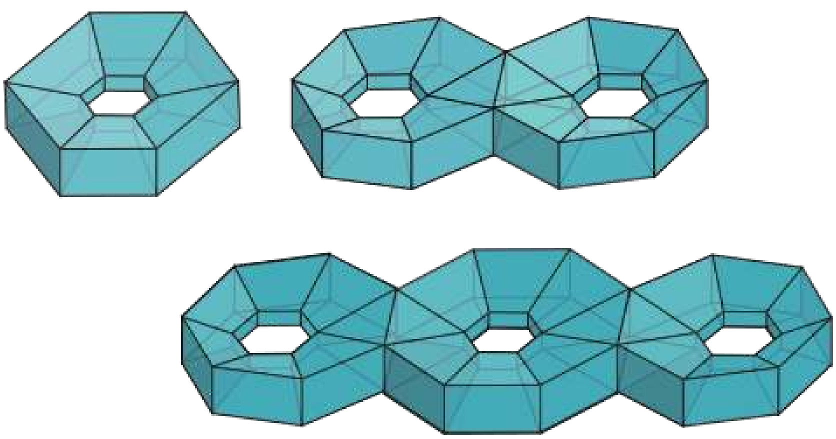
至于光滑版本，人们不久就弄清了米尔诺的怪球其实是总共 28 种的光滑的七维球之一。其它高维球的光滑结构经常也不只一种。2017 年，年轻的中国数学家王国桢、徐宙利证明 61 维球上只有唯一的光滑结构[1]。这是时间较近的前沿结果，涉及稳定同伦群的计算。从而，抛开四维球，光滑庞加莱猜想在不超过 61 维成立的维数已确定为 1，2，3，5，6，12，56 和 61。

四维的光滑庞加莱猜想至今尚无突破。

不可能的分类表

数学家爱好分类，因为分了类的东西可以迭代表来研究。但对不加限制的流形进行分类有点过于困难。当谈论流形时，我们经常把那些写照局部的欧氏空间比喻为地图，所以把它们合起来叫做图汇（atlas），分别叫做图卡（chart）。有的流形，无论怎样的图汇总包含有限张足以覆盖的图卡，同时它又没有哪块区域与别的地带全无邻接。这样的流形就像一个小规模的自治王国，局促但并不支离。数学上管它叫连通紧流形，也时常叫做闭流形。拓扑学首先关心闭流形在同胚等价关系下的分类。

一维的闭流形分类特别简单：它们都与圆圈同胚。二维闭流形又叫闭曲面，分类也不复杂。这时候出现两族：可定向族包括球面，余下的成员都是若干轮



上方左图是（中空的）轮胎面，右图是两个轮胎面的连通和，下方是三个轮胎面的连通和。依此类推，这个序列恰好给出除球面外的全部可定向闭曲面。图中的多边形剖分不是必须的，因为拓扑学关心同胚意义上的分类。

图 2. 轮胎面的连通和

[1] G. Wang and Z. Xu: The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. Ann. Math. 186 (2017), no. 2, 501–580.