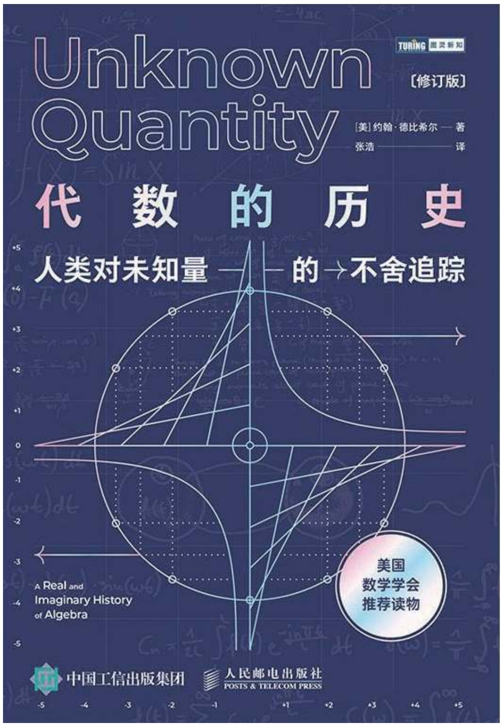
好书推荐

数学的两对辩证矛盾
——读《代数的历史》有感

宋 宁



一夜之间读完了人民邮电出版社的新书《代数的历史》，脑海中满满地就是两对矛盾——并不是“逻辑矛盾”，而是辩证唯物主义所讲的“辩证矛盾”，也就是蕴含在任何事物内部的辩证而又统一的两个方面。

哪两对辩证矛盾呢？

一是数学的**抽象与具体直观**，二是数学的**内在逻辑与形成逻辑**。

M 的误解

之所以在读过《代数的历史》之后，第一时间想到“数学的抽象与具体直观”这对矛盾，是因为：我觉得这是本书的一条**暗线**。

当然，这本书谈的是历史，是代数的历史，而代数的历史正是逐层抽象的历史。我这里用了“逐层”两个字，这并非信口开河。虽然人们公认数学是抽象的，但是这种抽象与具体直观并不是绝对的，而是相对的，更是有层次的。低一个层次的抽象，对高一个层次的抽象来说便是相对的“具体直观”。

这是我在多年数学学习和工作中形成的体会。我非常希望通过这篇文章澄清很多人对“数学抽象”的误解。

前些天我刚与一位朋友（姑且称为M）讨论过这个话题，正好，借着《代数的历史》这本书，我们也可以聊一聊这个话题。

当时，友人M正在查找德国数学家戴德金在1870年代的一些论文。我很好奇：他为什么要找那么古老的论文？毕竟他所找其实就是关于戴德金分割的文献，它是用来刻画实数的，现在这已经是经典理论了，很多书上都能找到。

M回答说，现在数学教材上出现的戴德金分割并非戴德金的本意，而M正在探求一种“好理解又兼具严谨性的无理数定义方式”，M觉得“康托和戴德金搞得**太抽象**，把实数搞得面目全

非”，抛弃了“几何启示”，而且“晦涩难懂，令人畏惧”；何况，一个戴德金分割就是一个实数，这**太不直观**了。

——但，我个人觉得这种顾虑是多余的。

我并不想公开地与 M 展开“论战”，我只是想就事论事地谈我对数学抽象性的理解。我觉得包括 M 这种比较专业的人，以及我们的某些数学教育工作者在内的很多人，都有类似的误解，他们把数学的抽象性绝对化了。

抽象的相对性

我认为，不论在数学教学中还是在数学研究中，追求“绝对直观”是**没有必要**也是**不应该的**。

说没有必要，是因为数学的抽象是相对的，分层次的。抽象并不等于“难”，也不等于“繁”。“抽象”只不过是我们将一些研究对象的共性从这些个体中抽取出来进行思考的过程。我们每个人从小到大都在不停地对客观或主观世界进行着各种各样的抽象，这不过是我们人类思维的功能而已。

以自然数 3 为例（这也是《代数的历史》中所举的例子），3 个苹果是 3，这没错；把苹果装进箱子里，装了 3 箱，这也是 3；再把苹果箱子装进卡车里，装了 3 车，这还是 3。这里的 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果从绝对的数量上看是完全不同的，但是它们的共性就是自然数 3。在这个例子里，自然数 3 就是 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果的“抽象”，而 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果等等都是自然数 3 的“具体直观”。

它难吗？不难。

它繁杂吗？恰恰相反，它更简洁了，因为自然数 3 是从 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果抽取出来的共性，它像除草剂一样剔除了干扰思维的各种“杂草”。

那么，“抽象的相对性”是什么意思呢？还是沿着上面的例子继续想。上面的例子，不过是从现实生活中抽象出“数”。在我们几乎整个小学阶段就是在熟悉这些“数”之间的各种运算。又经过小学高年级的一些铺垫，到了初中，情况发生了一次重大转变。因为到了初中，你开始学习用字母代替数运算了，在你的感受里，数学这个笼统的学科中第一次分化出一个分支。既然这个分支用字母代替数运算，那么它的名字当然就是“代数”了。

按照《代数的历史》中的记叙，这个事情在数学史上正式形成，要追溯到 16 世纪法国数学家韦达。实际上，这是第二个层次上的抽象。对那些初学代数的中学生来说，过去用数来做计算就是相对具体直观的，而现在使用字母代替数运算则是相对抽象的（但如前所述，相对现实生活来说，使用数来计算又是相对抽象的）。

再进一步，当中学生沿着代数这条路走下去，就不可避免地要面临解方程和方程组的问题。可能有学生在小学时代就知道鸡兔同笼问题，那时是用具体直观的数进行计算的，所以方法上要使用技巧性很强的所谓“假设法”。而现在呢，完全不需要了，因为已经从数的计算抽象到了代数运算，“假设法”中的“假设”完全可以用设取未知量 x 列方程来代替了。而且这样不仅可以解鸡兔同笼问题，还可以解其他类似问题。

你看，抽象过程让问题变难了吗？不，恰恰没有，正是这种抽象把问题变得简洁、清晰而且简单。

再继续，学会了解一次方程、二次方程之后，可能还有学生学会了卡丹公式，能解三次方程了，甚至有人知道了四次方程的根式解法。按《代数的历史》的记叙，这发生在 16 世纪的意大利（而且比韦达早）。虽然它们一个比一个难，但是并没有出现抽象层次上的跃升。实际上它依然停留在同一个层次上，它们都是关于代数方程根式解的问题。

好书推荐

直到人们发现，五次方程的根式解似乎无法给出来。但是进一步研究之后，人们又发现，由方程的根所构成的对称多项式与方程的系数之间有着密切的联系，这就是我们在中学就熟悉的韦达定理（不过，根据《代数的历史》的记叙，牛顿爵士也发现了这个联系）。这仍然没有出现抽象层次的提升，但是却为下次提升提供了重要的准备：**对称多项式**。

所谓“对称多项式”，是指将多项式的几个变元相互进行**置换**后不变的多项式。这种“变中有不变”的现象就是**对称**。比如，我们说正三角形是关于中心对称的，那是因为：如果我们将它绕中心逆时针旋转 120 度，它还和原来的三角形重合。在这个过程中，整个正三角形的边界上的每个点的位置都变了，但是这个三角形在旋转后整体上又是不变的（与原三角形重合），这就是“变中有不变”，这就是对称。

于是，如果仍然停留在用字母代替数字这个抽象层次上，那肯定是不行的，要想真正解决高次方程根式解的问题，需要研究这种置换变元时的“对称性”。按《代数的历史》的记叙，这在拉格朗日的时代已经有所研究了，代表性的工作就是**拉格朗日预解式**。

再进一步，仅仅研究代数方程上的对称性还不足以彻底解决问题，应该更抽象更广泛地研究对称性。那么对称有什么特点呢？

我们不妨把对称看成是一种“变中有不变”的变换，姑且称之为**对称变换**吧。接下来，我们固定一组研究对象的集合 S（在正三角形的例子中，S 就是其边界上的点的全体），考虑它们的全部的对称变换所构成的集合 G。G 有什么性质呢？

首先，如果连续对 S 做两个对称变换 g 和 h，那么 S 依然是不变的（可以参考正三角形的例子），换句话说，连续进行两个对称变换 g 和 h，仍然会得到一个对称变换，记作 $g \cdot h$，它正好可以看成 g 和 h 之间的运算，我们姑且称之为乘法吧。上面这个事实说得更数学化一点就是：

对 G 中任意的 g 和 h，其乘积仍然属于 G。

这叫**封闭律**。

其次，既然 G 中两个对称变换的乘法很重要，那么我们不妨试试三个对称变换的乘法，很容易发现，存在着这样的规律：$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$，这与数的运算中的结合律太像了，我们也叫它**结合律**吧。

第三，S 上恒等映射 e（也就是把每个点变成自身）显然不改变 S，因而是个对称变换，属于 G。而恒等映射因为实际上什么也没做，所以与 G 中的其他对称变换 g 相乘的结果还是 g 本身，这类似于数上的乘法中 1 的作用，所以我们叫它幺元（“幺”呢，就是 1 啦），这条结论就叫**幺元律**吧。

最后，对 G 中每一个对称变换 g，我们总能再找一个变换 h 把 g 变回去，以正三角形的对称为例，如果 g 表示正三角形绕中心逆时针旋转 120 度，那么 h 只要取顺时针旋转 120 度就可以了。换句话说，$g \cdot h$ 相当于什么也没动，也就是说，$g \cdot h = e$（恒等变换）。如果将恒等映射类比为实数乘法中的 1，那么 g 和 h 就可以类比于互为倒数的两个数，于是我们可以把它们叫做对方的逆元，这条规律也就可以叫做**逆元律**了。

这样就从 S 的全体对称变换的集合 G 上抽象出了四条本质属性：封闭律、结合律、幺元律和逆元律，这样的 G 再配上对称变换的乘法，就构成了**置换群**。按《代数的历史》的记叙，这项研究始于法国数学家柯西，并被挪威数学家阿贝尔引用，最终证明了一般的五次方程没有根式解。而正式开始研究置换群的，则是法国的苦命天才伽罗瓦，他死于一场虚妄的决斗。

再进一步抽象。把封闭律、结合律、幺元律和逆元律四条作为公理，并且规定：只要一个非空集合 G 上能定义一种运算，使得这四条