谈谈镶符问题（移棋问题）

胡著信

在《数学文化》2019 年第 4 期上，有一篇杨振宁先生的文章“许宝騄和‘移棋相间法’”[1]。很有意思。移棋问题，又称镶符问题。杨文所研究的是一般镶符问题里的 2 色移 2 问题。正如杨文所说，目前发现的最早记载这个问题的文献是三百多年前清顺治年间发表的《坚瓠集》，作者为褚稼轩（褚人获）[2]。在褚稼轩之后，清代朴学大师俞曲园也研究过这个问题[3]。俞曲园是俞平伯的曾祖父，许宝騄的曾外祖父。俞平伯的儿子俞润民是杨振宁幼时的朋友。这个起源于中国的镶符问题实际上是一种 Color Tiling 问题。另外两种有名的 Tiling 问题是 Wang Tiling[4] 和 Penrose Tiling[5]。Penrose Tiling 的发明者是今年诺贝尔物理学奖得主英国数学物理学家潘洛斯（Roger Penrose），Wang Tiling (Wang Tiles) 的发明者是数理逻辑学家王浩。镶符问题对 Wang Tiling 的产生有启发，而 Wang Tiling 对 Penrose Tiling 的产生有启发。

镶符问题是拓扑学古典问题之一。西方文献里，最早记载这个问题的是于 1884 年发表在《哲学与科学》杂志上的“李斯廷之拓扑学”（*Listing's Topologie*）一文，作者为英国数学物理学家泰特（Peter Guthrie Tait）[6]。这里的“Topologie”，不是打字错误，而是原文就是如此。这是德文单词。德国数学家李斯廷（Johann Benedict Listing）是“Topologie”这个德文单词的创造者[7]。

泰特在这篇文章里讨论了 25 个拓扑学问题，其中，问题 (12) 就是“镶符问题”。这篇文章还讨论了“地图四色问题”、纽结理论问题等。在问题 (12) 里，泰特写道，几个星期以前，他在火车上看到有人在玩一个移动数枚硬币的游戏。泰特给出了这个游戏（4 对硬币）的一个解：

---

[1] 杨振宁，许宝騄和“移棋相间法”，数学文化 2019/4.

[2] 褚稼轩，移棋相间．坚瓠集，五集卷一．

[3] 俞樾，春在堂随笔，卷一．

[4] H. Wang (王浩), Proving Theorems by Pattern Recognition, Bell System Technical Journal II.

[5] R. Penrose , The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research.

[6] P. G. Tait, Listing's Topologie, Philosophical Magazine and Journal of Science.

[7] J. Listing, Vorstudien zur Topologie, Göttingen。

移动前：OOABABABAB
一移后：BAABABAOOB
二移后：BAABOOAABB
三移后：BOOBAAAABB
四移后：BBBBAAAAOO

这里，A 代表先令，B 代表镑币，O 代表空格。泰特还讨论了一些更复杂的情况。

1889 年，德拉诺伊（Henri Delannoy ）在《自然》杂志（*La Nature*）上给出了这个问题（2 色移 2）的通解，即 n 对棋子的移法是 n 步的解法公式，对所有正整数 $n \geq 4$[8]。他的这个通解和杨振宁给出的通解是一样的。在德拉诺伊以后还有不少人也独立地给出了这个同样的通解。至此，读者也许会有下列两个问题：

(A) 这个通解是不是步数最少的解？即有没有步数少于 n 的解？
(B) 有没有人考虑过每步移 3 个棋子（2 色移 3）的问题？

问题 (A) 回答是，德杨两位得出的这个解就是步数最少的解，没有步数更少的解了。不难证明，对于任何正整数 n, 问题 (2，2，n) 没有步数少于 n 的解。

问题 (B) 回答稍微复杂一些。

1936 年，交通大学教授姜长英在《交大季刊》上发表了一篇研究镶符问题（移棋问题）的文章[9]。在这篇文章里，他给出了镶符问题 2 色移 2 的三个通解，其中的第一个通解和德拉诺伊的通解是相同的。他还研究了镶符问题的 2 色移 3 问题和多色移多问题，并给出了 2 色移 3 问题的通解。我们先来看几个 2 色移 3 的例子。

例 1 $n = 3$ (O 代表空格)
初始：ABABABOOO
向右跳过 2 枚棋子后：AOOOABBAB
向左跳过 1 枚棋子后：ABBAAOOOB
向右跳过 2 枚棋子后：OOOAAABBB
这个解法可简记为：
$T_2T_{-1}T_2\{(AB)^3O^3\} = \{O^3A^3B^3\}$

例 2 $n = 4$
初始：ABABABABOOO
向右跳 4 后：AOOOABABBAB
向左跳 2 后：AABBABOOOAB

[8] H. Delannoy, On Tait's Problem, La Nature (Science Progres Decouverte).
[9] C. Y. Chiang (姜长英), 移棋相间 , 交大季刊 .