



高中里的数学研究： PRIMES 的经验

Pavel Etingof, Slava Gerovitch, Tanya Khovanova / 文 刘刚 / 译

在三维空间内考虑一个有限的线集合。这些线中的3条线（不在同一平面内）相交于同一点，该点称为连接点。如果这里有 L 条线，那么最多可能有多少个连接点？好吧，让我们试试我们的运气，随机选择 K 个平面。任意两个平面构成一条交线，并且任意3个平面构成一个连接点。因此，它们产生了 $L := K(K-1)/2$ 条线和 $J := K(K-1)(K-2)/6$ 个连接点。如果 K 很大，那么 J 就大约等于 $\frac{\sqrt{2}}{3} L^{3/2}$ 。多年以来，人们认为该猜想在下面的意义上没有人可以做得更好：如果 L 很大，那么 $J \leq CL^{3/2}$ ，其中 C 是一个常数（显然 $C \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$ ）。该猜想被 Larry Guth 和 Nets Katz 在 2007 年证明，是关联几何学上的一个突破。Guth 还证明了可以取 $C = 10$ 。你可以做得更好吗？当然！目前最好的结果是任意 $C > 4/3$ 都成立。这是由来自罗德岛的十一年级学生 Joseph Zurier 在 2014 年证明的¹。



图 1. PRIMES 学生 Christina Chen

正在展示一个凸体可以隐藏在体积更小的四维体后面的照片（PRIMES 会议，2011）

¹ J. Zurier, Generalizations of the Joints Problem, math.mit.edu/research/highschool/primes/materials/2014/Zurier.pdf.

这里有另一个问题。令 K 和 L 是空间中的凸体，并且假设无论从哪个角度，我们都可以把 K 藏在 L 的后面（我们可以允许平移凸体但是不能旋转它们）。 K 的体积至多是 L 的体积是正确的吗？奇怪的是，不是！Christina Chen，一个马萨诸塞州的十年级学生，在 2011 年证明了体积比大约为 1.16，这是目前已知的最好值²（见图 1）。同样，它可以任意大吗？不！Christina Tanya Khovanova 和 Dan Klain 证明了在任意维度下它的体积比都要小于 3³。

“这是真的吗？十年级和十一年级的学生可以进行原创数学研究，这真的可能吗？”

是的！Christina 和 Joseph，还有其他上百名学生，在 PRIMES（Program for Research In Mathematics, Engineering, and Science（数学、工程和科学中的研究项目⁴））做着他们的研究。从 2011 年 1 月以来，PRIMES 一直由麻省理工学院数学系运作。每年我们都会从准备申请的学生、他们的家长和想组织相似项目的学者那里收到大量关于我们项目的问题。在这里，我们很高兴回答其中一些问题，分享我们的经验，并告诉更多数学界的人，在高中进行数学研究，这样一个看似不可能的事情是如何完成的。

“你们在寻找什么类型的学生？我的儿子想知道，如果他在国际数学奥林匹克竞赛没有一个完美的分数，并且尚未精通费马大定理的怀尔斯证明，他也可以申请吗？”

Pavel Etingof（以下简称为 **P. E.**）：是的，如果他热爱数学，必须的！一些背景知识（如微积分）是需要的，但是通常他会在导师的指导下学习。此外，很多有天赋的高中生在数学竞赛中做得很好，但好的研究人员并不总是快速的解决问题者。这需要时间、努力和有毅力去学习不同的背景和尝试不同的方法，其中许多人注定是失败的。我们寻找有天赋的学生去进行数学研究，他们要有坚持不懈的毅力，喜欢学习，努力工作，富有想象力。并且最重要的是，他们疯狂的热爱数学！

“你们如何挑选学生？我的女儿问，为了被接收，难道她需要成为一个把咖啡变成定理的机器？”

P.E.：数学家只不过是用了 10% 的时间把咖啡变成定理，然后在余生用各种不成功的方法去证明定理的人而已——并且我们欢迎你的女儿加入项目！

Slava Gerovitch（以下简称为 **S.G.**）：我们仔细考虑奥赛成绩、目的陈述、推荐和年级，但申请的关键部分是入学问题集。我们在 9 月中旬发布，两个月期限。

² C. Chen, Maximizing volume ratios for shadow covering by tetrahedra, arXiv:1201.2580.

³ C. Chen, T. Khovanova, and D. A. Klain, Volume bounds for shadow covering, Trans. Amer. Math. Soc. 366(2014), 1161-1177.

⁴ web.mit.edu/primes

Tanya Khovanova (以下简称为 **T.K.**): 这些并不是可以快速解决的问题,乍一看,他们中的一些甚至可以难倒数学教授。学生需要思考一个问题,查阅书籍和在线资源,第2天再想一想,然后一遍又一遍,直到有一天他们终于得到答案,然后写一个有详细证明的完整答案。这种长期参与数学问题的过程类似于数学研究过程。

P.E.: 事实上,这类似于我喜欢的业余爱好——采摘蘑菇。你可能在树林里转几个小时什么都看不到,然后突然间你会发现一个真正的宝藏。你需要耐心和能力去享受这个过程,忘记其它事情。一个好的采蘑菇的人和一个好的数学家有很多共同之处。

“PRIMES 的学生是单独工作还是群体工作?”

S.G.: 大多数课题是个人的并有一对一的指导。大学一、二年级的学生,通常在合作课题中工作。小组讨论使研究更令人兴奋并且激发年轻学生,使他们能更顺畅地进入数学的世界。即使从事单人课题的学生也并不孤单,他们与导师和建议课题的教师合作组成一个团队,在这里,不同水平、经验和资历的数学家成为平等的合作者。这种方式使得 PRIMES 学生能具有协作和团队精神的能力。

P.E.: 简而言之,我们都有两个选择,内向型的数学家(做研究时他喜欢看自己的鞋子)和外向型的数学家(他更喜欢看合作者的鞋子)。当然,所有的中学生都被鼓励经常看他们喜欢的导师的鞋子。

“你们如何选择课题?在 PRIMES, 学生会被要求证明孪生素数猜想吗?”

P.E.: 著名的未解决问题通常不会成为好的课题,但我们也不会指定已经知道结果的“玩具课题”。学生们深入到真正的研究,包含所有的不确定性、失望和惊喜。找到需要最少背景的前沿课题是运行 PRIMES 课题最棘手的问题。下面是我们希望 PRIMES 课题中看到的一些特征:

1. 容易的开始。有简单的课题初始阶段。
2. 灵活性。可以考虑几个相关问题,如果卡住了,可以从一个问题切换到另一个。如果问题太难或不够有趣,可以调整问题。
3. 计算机(实验)部分。计算机辅助研究来寻找模式和做出猜想是可能的。这样,通常具有很强编程技能的学生可以在他们还没有掌握理论工具的应用知识时更早地在课题中做出贡献。他们也更容易通过使用计算机代数系统的实际经验来学习新的数学概念,例如,代数和表示理论里的数学概念。
4. 顾问参与。可以接触到除导师以外的数学家(通常是建议该课题的教授或研究员),通过电子邮件和偶尔的会议讨论指导课题。这是一种非常不同的交流。
5. 大局观/动机。至少在思想层面,同更广阔的领域和别人的工作产生联系。
6. 学习部分。这个课题应该鼓励学生定期学习高等数学。
7. 可行性。一个合理的期望是,一个好学生在几个月中取得一些新的结