

## 波兰数学学派的领袖

——纪念夕尔宾斯基诞辰 140 周年

Waclaw Sierpiński

丁玖

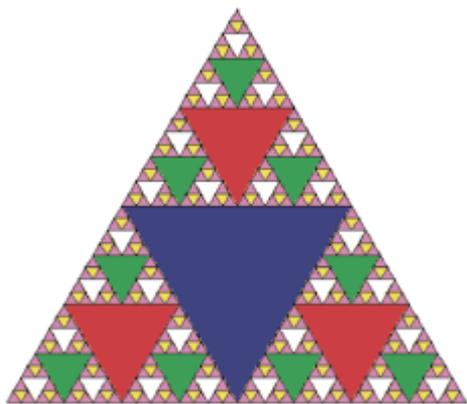
2022年3月14日，是波兰数学家夕尔宾斯基（Waclaw Sierpiński）诞辰140周年的日子。百余年来，全世界的数学家从他的724篇学术论文和50本书中获得思想、灵感及知识：集合论得益于他关于连续统和选择公理的基础性研究；数论学者从他众多的数论文章和教科书中获取信息与养料；他和俄罗斯杰出数学家鲁金（Nikolai Nikolaevich Luzin）的长期合作，为实变函数论的雄伟大厦添砖加瓦；作为不规则点集的先驱构造者，他留下的“夕尔宾斯基三角形”成为现代分形漂亮花园中的璀璨之作。

夕尔宾斯基的出生日期很有数学味，它是当今人们每年都要庆祝的“ $\pi$ 日”，难怪他的第一本著作专门研究无理数，因为他就生于无理数日。受到博士导师之一、数论学家沃罗诺伊（Georgy Voronoy, 1868-1908）的影响，他在早期的科学生涯中特别钟情于数论，大学毕业前研究的获奖题目也跟数论有关，并与数学王子高斯的一项工作结下了历史渊源。在去世前的二十年，他又回到所钟爱的数论领域继续耕耘。

说到夕尔宾斯基的数学贡献，对混沌尤其是分形学科有点了解的人马上就会想起“夕尔宾斯基三角形”的构造：给定一个等边三角形，去掉连接它的每条边中点所形成的那个每边尺寸减少一半的等边三角形，但保留它的三条边，然后对剩下的三个同样尺寸的等边三角形做同样的事情，接下来再对剩下的九个同样大小的更小的等边三角形重复做之，这样一直做到无穷；所有那些没有被拿走的点组成一个集合，它处处稀疏，像海绵一样处处有洞，但包含有不可数个点。这就是夕尔宾斯基在一百年前构造的“奇怪点集”，它是集合论创始人康托尔在闭



夕尔宾斯基（1882-1969）



夕尔宾斯基三角形

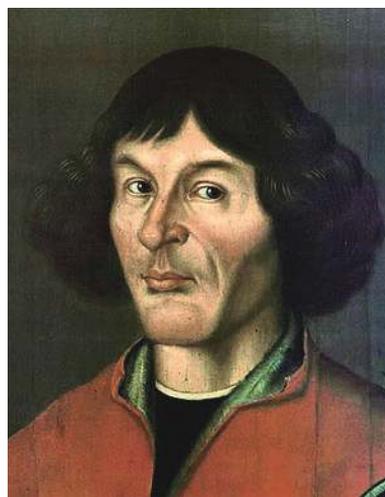
为登不上微积分大雅之堂的种种“怪胎”；类似的例子还有意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano）以及德国数学家希尔伯特画出的连续曲线，它们居然能跑遍二维的正方形。如今，这些超越时代的思想创造出的数学对象已经是自然现象“非光滑几何”研究中的基本元素。

科学巨人革命性工作的出现之初常常是步履维艰的，甚至有被扼杀在摇篮之中的危险。夕尔宾斯基的前辈同胞哥白尼提出的革命性“日心说”就是最好的例子。与夕尔宾斯基同时代的法国数学家勒贝格（Henri Lebesgue）创造了一种全新的积分理论，但习惯于可微函数黎曼积分的人根本理解不了他，遂使他成为不受欢迎的“没有导数的函数人”。但是，真理最终会战胜偏见，如今勒贝格积分早已成了现代分析数学的“通用语言”。同样，夕尔宾斯基的“分形三角形”和其它几个经典的具有“自相似性”特点的漂亮点集，经过半个多世纪的冷遇和沧桑，在过去的五十余年中被视为对于众多自然现象的比光滑几何更自然和更恰当的数学描述。

顺便一提，二十年前，美国一所大学的华人几何学教授张新民，把经典的夕尔宾斯基三角形推广到任意的三角形，所采用的分形构造方法是对三角形的各顶点作对边的垂线，再去掉由三个垂足所构成的中间那个“垂足三角形”，而保留其三条边，然后对剩下的与原三角形相似的更小三角形周而复始地做到无穷。对夕尔宾斯基无比崇拜的张教授将这一大类新的分形命名为“夕尔宾斯基垂足三角形”，尽管经典的夕尔宾斯基三角形只是其中外形三个角都是60度的那一个。

令夕尔宾斯基成名的第一项数学工作是在大学毕业前最后一年完成的。问题的叙述不太难懂，其历史涉及一些数学名人，

区间  $[0, 1]$  上构造的著名“康托尔三分集”在平面上的类似之物。这两个图形由于“分形之父”芒德布罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）于1967年开创的分形领域而变得大放异彩。现在人们都知道它们的维数分别为  $\ln 2 / \ln 3$  和  $\ln 3 / \ln 2$ 。除此以外，还有两个分形以他的名字命名：夕尔宾斯基地毯和夕尔宾斯基曲线。但它们都是在那个“数学的光滑函数时代”，由想法“怪诞”的集合论数学家母亲生下来的被视为



哥白尼（1473-1543）

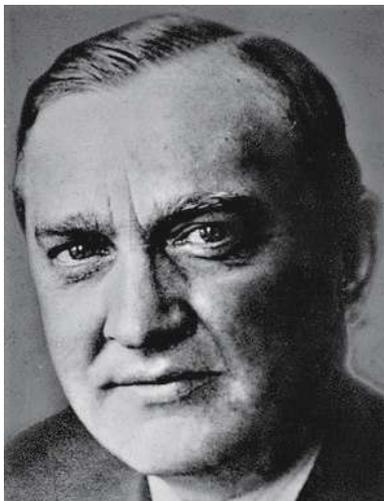
值得提一下。他想解决的问题是个著名的格点问题,通常被称为“高斯圆问题”。平面上的格点是那些坐标为整数的点。用  $N(r)$  表示以原点为中心、以  $r$  为半径的圆所包含的格点个数,则存在常数  $C$  和  $\alpha$  使得对所有半径  $r$  都有

$$|N(r) - \pi r^2| < Cr^\alpha.$$

令  $d$  为满足上述不等式的最小指数  $\alpha$ 。高斯于 1837 年证明  $d \leq 1$ 。夕尔宾斯基的主要贡献是他证明可以将此改进到  $d \leq 2/3$ 。1913 年,哥廷根大学的数论与分析学家兰道 (Edmund Landau) 缩短了夕尔宾斯基的证明,并称赞这个上界结果是“深刻的”。两年后,兰道和剑桥大学的哈代证明了  $d > 1/2$ 。到了 1923 年丹麦解析数论学家范·德·科皮特 (Johannes van der Corput) 证明出  $d < 2/3$ 。第二年英国分析学家李特伍德和合作者将它改进到  $d \leq 37/56$ 。苏联数学家维诺格拉多夫 (Ivan Vinogradov) 和德国数学家泰希米勒 (Oswald Teichmüller) 分别于 1932 和 1934 年又相继推进了一步。到目前为止,最佳结果大概是  $d \leq 7/11$ 。

夕尔宾斯基是一名为数不多的多产数学家,但是他对整个的数学世界,对他饱受苦难的祖国最伟大的贡献,却在于他一生致力于波兰数学学派的建立与壮大。他漫长的一生,充分展示了这位波兰数学领袖的眼光、智慧及其对一代代青年数学家的教导和影响。

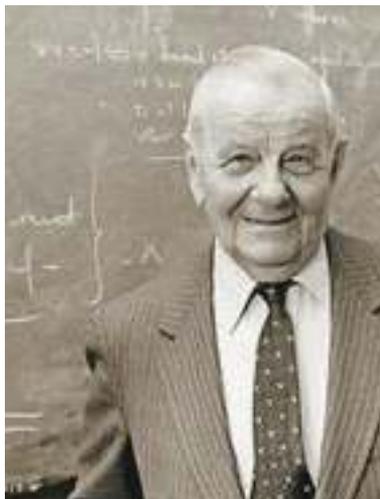
近现代的波兰既是一个长期遭受外来侵略的国家,也是世人皆知的几大历史巨人的诞生地。对科学极端诚实的哥白尼、对祖国满腔热爱的肖邦以及现代女性科学家的楷模居里夫人都是英名响彻云霄的伟大人物。有这样的人文和科学的传统,即便在 19 世纪曾被普鲁士、奥地利、俄国三度瓜分的这个欧洲国家,到了 20 世纪的上半叶,形成集中在首都及第一大城华沙和第二大城利沃夫 (Lwów; 现属乌克兰) 的两大波兰数学学派。华沙学派的强项在于集合论、数理逻辑、点集拓扑和函数论,它们大都与数学的基础密切相关,



巴拿赫 (1892-1945)



斯坦豪斯 (1887-1972)



赞格蒙 (1900-1992)

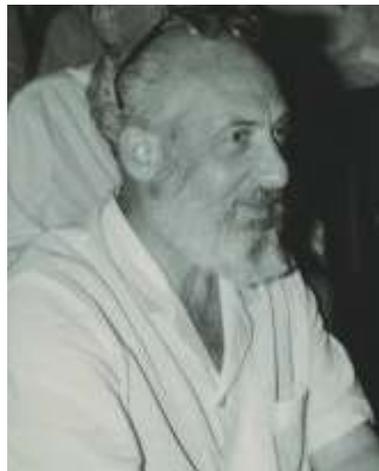


博苏克 (1905-1982)

在其几十年的发展和壮大过程中，夕尔宾斯基是名至实归的主要领袖。利沃夫学派主要以泛函分析几大定理的发现和证明著称于世，直到第二次世界大战结束那年因病去世，巴拿赫 (Stefan Banach) 始终是其当之无愧的王者，另一个领袖是发现巴拿赫天才的斯坦豪斯 (Hugo Steinhaus)。波兰数学学派涌现出一大批的杰出学者，包括领袖数学家夕尔宾斯基、泛函分析集大成者巴拿赫、调和分析权威赞格蒙 (Antoni Zygmund)、拓扑学奇才博苏克 (Karol Borsuk)、美国氢弹之父乌拉姆 (Stanislaw Ulam)、拓扑学宗师艾伦伯格 (Samuel Eilenberg)、概率学名家卡茨 (Mark Kac)。其他的几大波兰数学家，如马祖凯维奇 (Stefan Mazurkiewicz)、绍德尔 (Juljusz Schauder)、库拉托夫斯基 (Kazimierz Kuratowski)、萨克斯 (Stanislaw Saks)、塔尔斯基 (Alfred Tarski) 等，都是在国际数学界如雷贯耳的名字。



乌拉姆 (1909-1984)



艾伦伯格 (1913-1998)