

柏拉图的《蒂迈欧篇》与五轮塔的几何学

刘 钝

日本佛教寺庙流行的五轮塔，其外观、次序及形上意义与柏拉图《蒂迈欧篇》描述的宇宙图景高度相似；换言之，古希腊哲人借助几何化的元素学说描绘宇宙构成与变化的思想，通过五轮塔具象地表现出来了，很难设想二者之间没有任何联系。本文揭示日本五轮塔与古希腊几何化元素说之间的形神双重相似性，并尝试对五轮塔的起源与传播作一初步探讨。

从学生用的直角三角板说起

也许你还保存着这样的记忆：小学高年级或进入中学不久，数学老师说每个人都要准备一副三角板：无论材质如何，其中一个是一个锐角均为45度的等腰直角三角形，另一个是锐角分别为30度和60度的直角三角形，任何一家文具商店都会出售。至于为什么，老师没有讲，也没有人追问过，直到今天似乎还没见到一本书讨论这个问题。

当然可以做出多种解释，比方说能够方便地作垂线、平行线、画直角和一些特殊角，有助于记忆特殊角的三角函数等等，不过细究下来都不能令人满意。不同于后世的工匠与画师，古希腊人在作图中只允许使用没有刻度的直尺与圆规。在他们那里，尺规作图是一种与欧几里得公理体系高度匹配的思想操练。为什么全世界学习几何学的学生，需要这样一种貌似反欧几里得传统的“标配”呢？

直到读了柏拉图《蒂迈欧篇》，笔者方觉豁然开朗。原来，这两种特殊的直角三角形，是柏拉图展开其宇宙构造图景的基础，而这一思想的源头可以

追溯到认为“万物皆数”的毕达哥拉斯那里去。根据大家知道的一个传说，几何学是进入柏拉图学园的通行证，而《蒂迈欧篇》正是柏拉图阐述其宇宙观的代表作，书中为两种特殊的直角三角形赋予了超凡脱俗的意义。

柏拉图借助一个名叫蒂迈欧 (Timaeus of Locri) 的人¹，讲述了造物主借助几何学“创造万物和这个宇宙的根据”，两种特殊的直角三角形则是构造完美几何形体的基础。书中的蒂迈欧说道：“首先这一点是大家都会认同的，即水、火、土、气都是立体。一切立体都有厚度，并被许多面包围。由直线所围的面乃由三角形构成；所有的三角形都可以归到两种直角三角形中”；“归结起来，它们是：一种是等腰的；一种是其长边的平方四倍于短边的平方。”²

蒂迈欧接着说，4个等腰直角三角形可以构成一个正方形，6个正方形的面可以围成一个正6面体即立方；2个第二类直角三角形可以构成一个正三角形³，而4、8、20个正三角形可以分别围成一个正4面体、正8面体和正20面体。

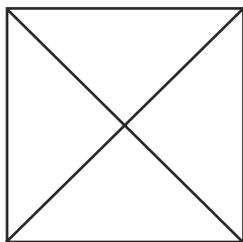


图 1. 4 个等腰直角三角形构成正方形

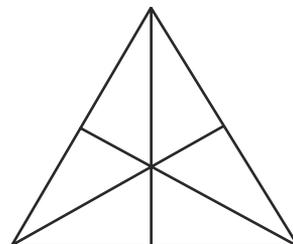
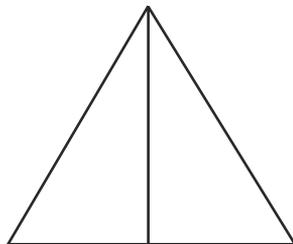


图 2. 2 个或 6 个 (第二类) 直角三角形构成正三角形

至于以这样一副直角三角板作为学生的“标配”，有人说始于路易十四的皇家仪器制造商毕翁 (Nicholas Bion)⁴，对此笔者还无法贸然肯定。毕翁设计与销售的各种数学仪器，以及他撰写的一本关于数学仪器的构造与使用方法的书⁵，在 18 世纪的欧洲曾广为流行，然而书中没有言及柏拉图及其《蒂迈欧篇》。

¹ 蒂迈欧也许是柏拉图虚构的一个人物，仅见于《蒂迈欧篇》与柏拉图的另一部对话录《克里底亚篇》(Critias)，从其出生地洛克里 (Locri, 位于意大利南部) 判断，这个人物应该是毕达哥拉斯学派的传人。

² 柏拉图著、谢文郁译《蒂迈欧篇》，上海人民出版社，2003年，27、50-51页。最后一段引文，此译本误作“三倍”。

³ 原书用 6 个，称“这样，六个 (第二类直角) 三角形便构成了一个等边三角形”，这里简化了叙述。参阅前引《蒂迈欧篇》52 页。

⁴ 例如可参考 Askadmin, What is the function of set square? May 6, 2021. 见 <https://askingfact.com/what-is-the-function-of-set-square/>

⁵ Nicolas Bion, *The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments*, trans by Edmund Stone, London, 1723.

柏拉图的宇宙论与正多面体

现在让我们离开三角板来看柏拉图的几何—元素学说。据说他或他的学派已经知道只有五种（凸的）正多面体并给出了证明，这也是欧几里得《几何原本》最后一个命题（卷13命题18）的推论。这一事实令某些人“鼓吹这样一种观点，即由希腊人创立并在欧几里得的《几何原本》中奉为圣典的几何学演绎体系的主要目的就是要构成这五个正立体。”⁶ 如果这一论点成立，不啻于说欧几里得撰写《几何原本》的最终目标，就是为柏拉图的宇宙图景提供一个坚实的数学基础。

将柏拉图学派珍视的几何学与古代爱奥尼亚学派的元素学说结合起来，展开世界生成与变化的图景，可以说是《蒂迈欧篇》中最精彩的内容。书中提到构成世界的四大元素对应四种正多面体：火对应正4面体，土对应正6面体，气对应正8面体，水对应正20面体；又将不同的物理属性赋予这些元素或立体，例如火（与正4面体）对应小、轻、热、尖锐，水（与正20面体）对应大、圆、柔、流动，土（与正6面体）对应重、稳、冷、坚硬，气（与正8面体）居于火、水之间，以此来解说地上万物的生成与变化⁷。

书中又提到“还有第五个立体，造物主用它来作为整体的模型”⁸，但是没有言及这种立体的形状。考虑到柏拉图学派已经知道只有五种正多面体，一般人认为这里的“第五个”指具有12个正五边形面的正12面体。《蒂迈欧篇》Lamb英文译本对此注释道：“神如何‘用它’是含糊的：这里也许指黄道十二宫”⁹。如果这一猜测正确，第五种立体就对应天上的元素，因为古希腊人通常以黄道十二宫代表广袤无垠的星空，这一传统可以追溯到古代巴比伦。

柏拉图没有给第五种立体命名，也没有为它指定对应的元素。亚里士多德继承了柏拉图的几何—元素学说，明确指出土、水、气、火属于地上元素（terrestrial elements），因其自身性质占据不同的天然位置，沿着直线运动，不断变化着并构成人类所能感知的世界；此外，还有一种超凡的天上元素（celestial element），构成了天体与星空。这种元素不生不灭，没有重量，没有冷热与干湿变化，沿着圆周运动。亚里士多德将它称为以太（aether，希腊

⁶ 转引自H. 魏尔著、钟金魁译《对称》，商务出版社，1986年，57页。

⁷ 前引《蒂迈欧篇》39-64页。

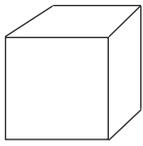
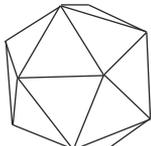
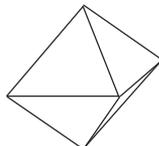
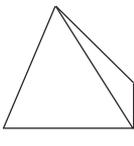
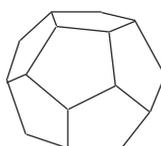
⁸ 前引《蒂迈欧篇》53页。不同版本对“第五个立体”的意义有不同的翻译，例如“造物主用其代表宇宙作为一个整体的形状（to represent the shape of the Universe as a whole）”，“神用它来界定宇宙（that which God used in the delineation of the universe）”等，出处从略。

⁹ Plato, *Timaeus*, 55c. in W. R. M. Lamb trans. *Plato in Twelve Volumes*, Vol. 9, Cambridge (MA): Harvard University Press, 1925. 原文是：How God ‘used it up’ is obscure: the reference may be to the 12 signs of the Zodiac.

文 *aiθḗρ*)¹⁰。

经过众多后来学者的评注和解说，五种元素对应五种正多面体的思想，成了希腊古典时代自然哲学和宇宙论的一个重要理论模型（表1）。

表 1. 五种正多面体及其对应的五大元素

正 6 面体 土	正 20 面体 水	正 8 面体 气	正 4 面体 火	正 12 面体 以太
				
重，稳， 冷，干，坚	大，圆， 柔，冷，湿， 流动	居中，热，湿	小，轻， 热，干，尖锐	无重量， 不冷不热， 不干不湿
世俗的，变化的，沿直线运动				神圣的， 永恒的， 作圆周运动

长久以来，柏拉图和亚里士多德阐述的宇宙构成与演化图景主宰着西方数理科学的发展，图3是一幅流传很广的宇宙构造图，出自德国学者阿皮亚努斯（Petrus Apianus）的《宇宙志》（1524）。当时哥白尼的《天球运行论》还没有出版，图中描绘的宇宙图景是建立在亚里士多德—托勒密地心说基础上的：地球位于中央，中心有几块土地，上面依稀可辨树木、村庄等景物，环绕大地的是海洋，外面布满云朵的一圈表示大气，再外一圈是火，至此都是人间世界，由土、水、气、火这四种地上元素构成；火上的同心圆依次为月亮、水星、金星、火星、木星、土星与恒星圈，月上世界是纯净而永恒的星空，由天上元素以太构成。图4是开普勒发表在《宇宙的秘密》（1596）一书中的宇宙模型：他已经抛弃了地心说，设想地球和五大行星的轨道分别位于大小不等的6个球面上，从里到外按照正8面体、正20面体、正12面体、正4面体、正6面体的顺序依次套切，太阳居中心。

阿皮亚努斯的宇宙图景清晰表达了天与地的划分（以月球圈为界）和四种地上元素的位置关系，但是不涉及《蒂迈欧篇》描述的那种几何化的五大

¹⁰ Aristotle, *On the Heavens*. in R. J. Hankinson trans. *Simplicius' On Aristotle's On the Heavens*, 1:1-4, Bloomsbury Publishing 2002. pp. 269-270, esp. p.270b. 又，“以太”这个词并非亚里士多德首创，柏拉图在谈到气时就提到“最明净的气称为‘以太’”（前引《蒂迈欧篇》57页），亚里士多德则将它赋予“天上元素”的全新意义。