杨振宁先生的数理工作漫谈

林开亮

我的物理学界同事大多对数学采取功利主义的态度。也许因为受我父亲的影响，我较为欣赏数学。我欣赏数学家的价值观，钦佩数学的优美和力量：它既有战术上的随机应变，又有战略上的深谋远虑。而且，堪称奇迹中的奇迹：它的一些美妙概念竟是支配物理世界的基本结构。

杨振宁

《杨振宁论文选集》，74 页

我请大家注意杨振宁的三个很突出的、同时也是罕见的集齐于一身的特点。第一，极其高超的数学能力，使他能够解决技术性问题；第二，对自然的深刻理解，使他能提出重要的问题；第三，一种团队精神，使他在中国文化的复兴中发挥主要作用。 总之，这三种特质，造就了杨振宁之所以成为杨振宁，一个保守的革命者，他尊重历史并引领未来。

弗里曼・戴森

《飞鸟与青蛙》序言，该书 2015 年出版

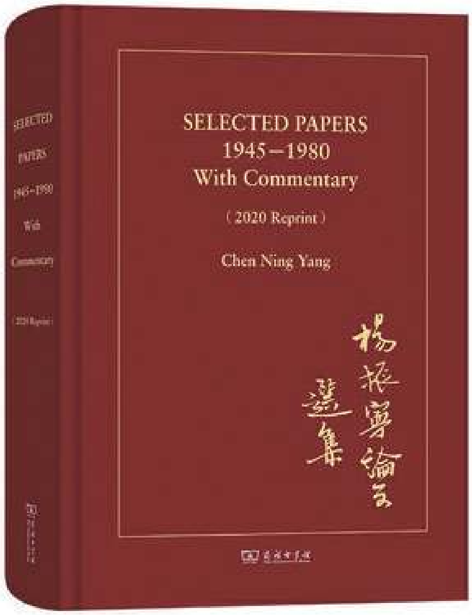

图 1.《杨振宁论文选集》收入杨振宁自选的部分代表作，1983 年出版。雕塑家熊秉明 [1] 为封面题字

欣逢杨振宁先生百岁华诞之际，我们对杨先生的数理工作略作介绍，希望有助于增进读者对杨先生非凡的学术成就的了解。首先要声明，笔者的物理修养不足，这里无法揭示杨先生工作之物理背景，请读者见谅。为免得读者误以为杨先生仅仅是擅长数学而已，这里我要先引用一段话 [2]。

访谈者问：我想您一向认为，理论发展中物理图像要很清楚，这也是您一贯的风格。是不是理论物理学家的风格也很不一样?

杨振宁答：我想如果把理论物理学家分类，可以有种种的方向来分，我们单讲一个方向，就是对于数学的喜爱、能力以及用数学的风格，由这个方向可以把理论物理学家放在一条线，一边是非常数学的，一边是非常不数学的。

如果我们谈到理论物理学家的风格，可以把当时最要做数学的，最不要做数学的，和后来的规范场论，说成是三个方向，一个在右，一个在左，一个在中间。我一直认为在中间的较容易成功。

事实上，杨先生本人就是那种“在中间的”理论物理学家。作为对照，杨振宁在普林斯顿高等研究所的同事戴森(Freeman Dyson)就属于“最要做数学”的那一种，见本刊关于他的传记 [3]。

[1] 1922-2002，其父是中国著名数学家熊庆来（1893-1969）。

[2] 杨振宁：我对亚洲发展是一个乐观的看法，《知识通讯评论》79 期，2009.05.01.

[3] 林开亮，戴森传奇，《数学文化》第六卷 (2015 年) 第三期。

图 2. 李政道与杨振宁在普林斯顿高等研究所合影，1961 年左右

一 . 单位圆定理 [1952]

1952 年，杨振宁与李政道合作，研究了相变理论，在他们第二篇合作文章中，引出了他第一个引以为豪的数学结果，称为“单位圆定理”。关于该定理的发现过程，杨先生在《杨振宁论文选集》第 15 页引用了他 1969 年写给卡茨（Mark Kac）的一封信：

> 尔后，12 月 20 日左右的一个晚上，我在家里工作，忽然领悟到，如果使 $Z_1,Z_2,\cdots$ 成为独立变量并研究它们相对于单位圆周的运动，就可以利用归纳法、通过类似于您所用的那种推理得到完整的证明。一旦有了这个想法，只需要几分钟就可以写出全部的论证细节。
>
> 第二天早上，我开车同李政道去弄棵圣诞树，在车上我把这个证明告诉了他。稍晚些时候，我们到了研究所 [4]。我记得，我在黑板上给您讲述了这个方法。
>
> 这一切我都记得很清楚，因为我对这个猜想及其证明感到很得意。虽然说这算不上什么伟大的贡献，但是我满心欢喜地视之为一颗小珍珠。

有迹象表明，这是杨振宁发现的第一个漂亮数学定理。杨振宁的弟弟杨振平曾写到 [5]：

> 1951 年圣诞节，我去普林斯顿大哥家度假，他那时刚刚证明了单位圆定理。

[4] 指普林斯顿高等研究所。

[5] 杨振宁，翁帆，《晨曦集》（增订版），商务印书馆，2021. 254 页。

图 3. 杨振宁与卡茨。卡茨以 Feynman–Kac 公式闻名，在 1940 年代与埃尔德什一起将概率方法引入数论

我大学尚未毕业，数学和物理的基础都不是很强，他兴致极高地跟我讲单位圆定理。虽然我完全不明白他说什么，可是他当时的极端兴奋，给我留下了不可磨灭的印象。他说他在这个问题上苦思良久没有结果，曾经去请教高等研究所著名数学家冯•诺依曼教授。冯•诺依曼亦不知如何措手。六个星期以后，他终于解决了困难，得到了全部证明。他当时还说，“这恐怕将是我一生中能证明的最美的定理。”多年以后，我提起他的这句话，他已经完全不记得了，可能是因为他做了更重要更美的工作。

为介绍单位圆定理，我们需要了解图上的伊辛模型。它是磁铁的一个统计力学模型，由物理学家伊辛（Ernst Ising）在 1925 年提出。给定一个（有限）图 G，它的顶点（只有有限多个）集合记为 V，边的集合记为 E。表示这些顶点之间的基本关系（是否有边相连）的，是一个邻接矩阵，记为 A。现在假设在每个顶点放置一个磁针，北极可能朝上或朝下，分别用 ±1 表示。这样一个构型就称为一个状态（state），它可以用一个函数 $\omega\colon V\to\{1,-1\}$ 表示，可以视为一个 $|V|$ 维列向量，这里 $|V|$ 表示集合 V 的元素个数，即顶点的个数。所有状态的集合不妨记为 $\{1,-1\}^{|V|}\subset\mathbb{R}^{|V|}$。对于每个状态 ω，赋予能量

$$H(\omega)=-\frac{1}{2}J\omega^{T}A\omega-h\eta^{T}\omega$$

其中 h, J 是常数，ω^{T} 是 $\omega\in\mathbb{R}^{|V|}$ 的转置，$\eta^{T}=(1,\cdots,1)$ 是分量全部为 1 的 $|V|$ 维行向量（换言之，η 描述的状态是全部磁针北极朝上）。这就给出了任意一个图 G 上的伊辛模型。

根据统计力学的 Boltzmann-Gibbs 原理，状态 ω 出现的概率 $P(\omega)$ 正比于 $W(\omega)=\exp(-\beta H(\omega))$，其中 $\beta=\frac{1}{kT}$，k 是 Boltzmann 常数，而 T 是温度。从而有配分函数（归一化常数）

$$Z_G=Z_G(h,J,\beta)=\sum W(\omega)=\sum \exp(-\beta H(\omega)).$$

将伊辛模型的能量函数代入，就得到

$$\begin{aligned}Z_G&=\sum_{\omega\in\{1,-1\}^{|V|}}\exp(\beta J\frac{1}{2}\omega^T A\omega)\exp(\beta h\eta^T\omega)\\&=\sum_{\omega\in\{1,-1\}^{|V|}}\exp(-\beta h|V|)[\exp(\beta J)]^{\frac{1}{2}\omega^T A\omega}[\exp(2\beta h)]^{\frac{\eta^T\omega+|V|}{2}}\end{aligned}$$

做变量替换 $\sigma=(\omega+\eta)/2,\quad z=\exp(2\beta h),\quad t=\exp(2\beta J)$, 就有

$$\begin{aligned}Z_G&=\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{|V|}}\exp(-\beta h|V|)\exp(\beta J|E|)[\exp(2\beta J)]^{\sigma^T A\sigma-\eta^T A\sigma}[\exp(2\beta h)]^{\eta^T\sigma}\\&=\sqrt{z}^{-|V|}\sqrt{t}^{|E|}\tilde{Z}_G(z,t),\end{aligned}$$

其中 $|E|$ 是边的数目，$\tilde{Z}_G(z,t)$（对每个给定的 t）是 z 的 $|V|$ 次多项式。于是最简单的单位圆定理相当于说：

定理 1

对任意的图 G 上的伊辛模型，其约化配分函数

$$\tilde{Z}_G(z,t)=\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{|V|}}t^{\sigma^T A\sigma-\eta^T A\sigma}z^{\eta^T\sigma}$$

对任意的参数 $t\in[1,+\infty)$，其零点落在单位圆周 $|Z|=1$ 上。

事实上，单位圆定理比定理 1 更一般。一般的单位圆定理说，同样的结论（约化配分函数的零点落在单位圆周）对实对称矩阵 A 成立，只要 A 的每一个非对角元都非负（这在数学上对应着带权重的图）。

单位圆定理在物理学中有重要意义，引起了许多数学物理学家的兴趣。1970 年，利布（E. Lieb）与埃尔曼（O. J. Heilmann）给出了单位圆定理在图论中的一个变体：任意图的匹配多项式（matching polynomial）仅有实零点。利布 - 埃尔曼这一结果及其改进被马库斯（A. Marcus）等用于构造 Ramanujan 图，其成果发表在 2015 年的《数学年刊》。法国高等科学研究所的吕埃勒（David Ruelle）在其科普著作《数学与人类思维》中还专辟一章讲单位圆定理，并在 2010 年《数学年刊》发表一篇题为“李 - 杨多项式的刻划”的文章。