

数学与艺术如何“暗送秋波”

魏宇

1550年，乔治·瓦萨里出版了《大艺术家传》(*Lives of the Artists*)，首次提出了“文艺复兴”一词。书中记载了一则数学与艺术的趣闻：一天教皇派特使前往佛罗伦萨，想了解画家乔托·迪·邦多纳（后世称其为“欧洲绘画之父”）是否果真名副其实。特使向乔托索要一幅画送给教皇，只见乔托拿出一张纸、一支蘸着红色颜料的笔，将手臂紧贴在身旁，随即转了一圈，在纸上画出一个圆。这是一个相当完美的圆，即使用圆规作画也不过如此。特使还以为被戏弄了，教皇看罢却大为赏识。

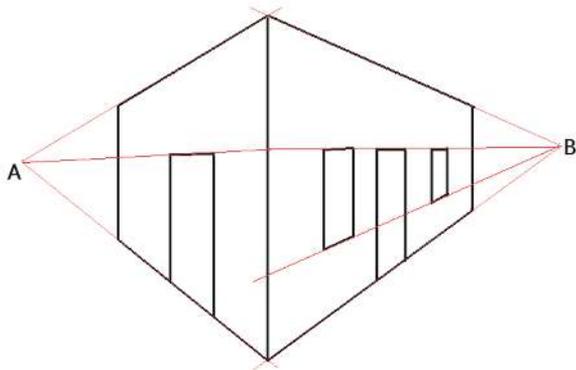
时至今日，以“数学与艺术”为主题的著作已不少见，其意图通常是单边的，即发掘数学中的艺术性或艺术中的数学性。好比一位艺术家告诉我们他眼中的数学是什么样子，或者一位数学家讲述他眼中艺术的样子。分别戴上这两种著作的滤镜都使我们看到过瑰丽别样的图像，像是莫比乌斯带上的蚂蚁以及埃舍尔无限楼梯等。

蔡天新的《数学与艺术》则别出心裁地展示了一种双边的视角，他“从数学与艺术的发展历程来揭示它们之间的相似性和本质属性”是如何形成的（页7）。这部书甚至可以当作一本饶有趣味的数学简史与艺术简史来读，作者不惜笔墨搭建了相对翔实的历史细节、人物生平、背景知识等，还原数学与艺术发展两大主线在所谓“隐秘深处”的交织与关联。而这又会呈现什么样的图景呢？

数学与艺术“暗送秋波”

从古希腊开始，亚里士多德的《诗学》建立了艺术的准则：艺术的本性就是模仿。文艺复兴时期的艺术家们对数学拥有广泛的兴趣，重要的原因是“艺术家要创作逼真的作品，除了颜色、形态和意图，他或她所面对的对象本身是有一定空间的几何形体”（页92），或者说艺术的对象就是一定的数学内容。上例中乔托之圆是数学的，因为它是一个圆，一个简单但完全是数学的轨迹；同时它也是艺术的，因为它是一个由画家绘制，供他人感知、欣赏的艺术品。

数学的对象也包含许多的艺术内容。毕达哥拉斯发现满足特定数学关系的音程是和谐的，因此提出“万物皆数”的命题；具有黄金分割比的造型能给人带来奇特的美的享受；数论的研究发现了完美数、友好数、佩尔方程、费尔马定理等揭示自然数本身之美的结果；还有这本书封皮上印着的，分形的几何结构形成众多具有特别现代感的、精美奇妙的艺术图案。这其中数学与音乐的关系值得大书特书，也正是本书的主题之一。如果说“乔托之圆”的例子说明画数学也就是画艺术，那么阅读本书告诉我们，研究音乐有时也是研究数学。就像大数学家欧拉对音乐理论的研究在一定程度上帮助他开创了数学新领域——图论的研究。



绘画中的两点透视



丢勒作品《忧郁》(1514), 以幻方营造神秘气氛

数学与艺术发展的“互模拟”关系

逻辑学有一个有趣的概念叫“互模拟”(bisimulation)。想象两人 A 和 B 在做游戏, 对象是两个抽象的发展进程(分别有若干节点, 节点间用有箭头的线相连)。A 认为两个进程是一样的, 称为“支持者”; B 认为它们不一样, 称为“反对者”。游戏中 B、A 先后在两个进程上各自选一个节点进行比较, 看是否一样, 把这样一对节点称为一个游戏状态。

在每一个游戏状态上, 若反对者 B 从其中一点沿箭头走到了后继点, 则支持者 A 就需要走到另一点的后继点上, 相应地, 游戏状态变成这两个后继点, 游戏继续。反对者赢的条件是, 当前的游戏状态并不能看作一样, 或支持者没得走了。逻辑中用支持者赢来定义两个抽象进程有互模拟的关系, 即是相互模仿的, 实际上可以看做一样。

拿互模拟的概念看, 作者在整本书中进行了一场左右互搏的游戏, 一人分饰两角, 同时饰演支持者与反对者。从毕达哥拉斯“万物皆数”这一共同的起点开始, 艺术发展上有亚里士多德的《诗学》, 在数学史上就能找到欧几里得的《原本》与之相对, 其相似处在于以相似的方式各自建立起艺术与数学的准则。游戏继续。到文艺复兴时期, 有造型艺术与几何学同音共律。在德国中部的哈茨山附近, 诞生了“数学王子”高斯, 也诞生了“音乐家中的数学家”巴赫。

十九世纪数学上非欧几何的研究打破经典欧氏几何的垄断地位, 揭示了并非哪一种几何学可以唯一准确地描绘现实世界; 而艺术上以毕加索为代表的立体主义等流派开始了新的实践, 绘画不再是准确地模仿现实, 一张画布上可以同时容纳画家感受到的、思考到的和想象到的。二十世纪以来, 在数学与艺术的重要分支和流派中, 数学上有体现个性的拓扑学, 艺术上就有载歌载舞、个性鲜明的超现实主义;