James Maynard

詹姆斯 • 梅纳德
—— 解析数论的曾阿牛

郗　平

2022 年菲尔兹奖于 7 月 5 日在芬兰赫尔辛基阿尔托大学（Aalto University）正式揭晓，分别授予法国高等科学研究院的雨果 • 迪米尼 – 科潘（Hugo Duminil–Copin，36 岁）、美国普林斯顿大学的许埈珥（June Huh，39 岁）、英国牛津大学的詹姆斯 • 梅纳德（James Maynard，35 岁）和瑞士洛桑联邦理工学院的马林娜 • 维亚佐夫斯卡（Maryna Viazovska，37 岁）。

梅纳德是当今数论特别是解析数论界的青年领袖，在素数分布、丢番图逼近等方面做出了卓越的贡献。借此机会为大众介绍其数学贡献及解析数论这一领域，都是颇有意义的。

梅纳德于 1987 年 6 月 10 日出生在英国的切尔姆斯福德（Chelmsford，英格兰埃塞克斯郡的郡都），在剑桥大学女王学院完成本科及硕士阶段学习后，于 2009 年进入牛津大学，在罗杰 • 希斯布朗（Roger Heath–Brown）指导下于 2013 年获得哲学博士学位。之后直接在牛津大学莫德林学院（Magdalen College）成为了 Junior Research Fellow，同时也赴加拿大蒙特利尔大学从事博士后研究，合作导师是安德鲁 • 格兰维尔（Andrew Granville）。人们所熟知的他关于素数有界间隔的工作就是在博士后期间完成的。

2013–2014 年是梅纳德在学问上突飞猛进的一年，期间他以一己之力完成了如下壮举：

左起：维亚佐夫斯卡、梅纳德、许埈珥、迪米尼-科潘

● 2013 年 11 月，他证明了存在无穷多对相邻素数，其间隔不超过 600。他与张益唐的方法有着本质的不同，而且可以处理任意有限多个连续素数的间隔问题。与此同时，他的洞见表明人们在上世纪五十年代就基本具备了证明相似强度结果的能力。这是令人震惊的，也难免有些使人沮丧。

● 2014 年 8 月 21 日，他在 arXiv 上公布了一篇新作 *Large gaps between primes*，证明了有“很多”对相邻素数的间隔是比较大的，其量级可以达到之前保罗•埃尔德什（Paul Erdős）所猜测的。就在梅纳德公布新作的前一天，有四位成名数学家也在 arXiv 上宣布证明了完全一致的结果，他们是福

梅纳德

希斯布朗

格兰维尔

特、格林、孔亚金和陶哲轩（Kevin Ford，Ben Green，Sergei Konyagin 和 Terence Tao）。两项工作是完全独立的，各自证明了埃尔德什的猜想，而且梅纳德的方法被公认为更加简洁，其中也借鉴了他在先前关于相邻素数有界间隔的工作。

以上两项工作远不足以道完梅纳德在近十年的贡献。在开始详细介绍他的工作之前，我们先列举一下他最近几年所获的奖励和荣誉：

- 2014 SASTRA 拉马努金奖（SASTRA Ramanujan Prize）
- 2015 伦敦数学会怀特海奖（Whitehead Prize）
- 2016 欧洲数学会奖（EMS Prize）
- 2020 美国数学会科尔数论奖（Cole Prize in Number Theory）
- 2020 欧洲科学院院士（Member of Academia Europaea）
- 2022 菲尔兹奖（Fields Medal）

梅纳德的学术贡献大致包括：

- 相邻素数的小间隔与大间隔
- 稀疏集合中的素数分布
- 丢番图逼近中的达芬 – 谢弗猜想（Duffin–Schaeffer conjecture）
- 素数在大模算术级数中的平均分布
- 布朗 – 蒂奇马什定理（ Brun–Titchmarsh Theorem）
- 克鲁斯特曼和（Kloosterman sum）的符号变化与兰道 – 西格尔零点（Landau–Siegel zero）
- 三素数定理的小区间版本
- 塞尔伯格筛法（Selberg sieve）的一般性理论
- 黎曼 zeta 函数的零点分布
- 对新一代数论学家的培养

我们主要介绍梅纳德的前三项贡献，也是他获菲尔兹奖的基础，文末也简单介绍后面几条。

一、相邻素数间隔

素数分布一直很迷人，时而清新，时而雄壮。素数分布也很神秘，是规则，抑或混沌，取决于我们观测的尺度。1896 年，法国数学家阿达玛（J. Hadamard）和比利时数学家瓦莱 • 普桑（C.–J. de la Vallée Poussin）独立证明了素数定理，证实了高斯和勒让德长达近百年的猜测。再结合狄利克雷在 1837 年的结果，不难发现素数在整数集及算术级数中的分布都是相对规则（均匀）的。另一方面，孪生素数猜想断言有无穷多对素数间隔为 2，因此从“局部”上看，相邻素数可以非常靠近；而对于每个整数 $n>1$，连续的 $n-1$ 个整数 $n!+2, n!+3,\cdots, n!+n$ 又均为合数，从而相邻素数之隔看似又可能很大。

通常用 p_n 表示第 n 个素数，从而 $p_1=2, p_2=3, p_3=5,\cdots$。关于相邻素数间隔 $p_{n+1}-p_n$，有如下两个著名的猜想：


高斯


阿达玛


德•拉•瓦莱•普桑

- 孪生素数猜想：

$$\liminf_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)=2.$$

- Cramér 猜想：

(1) $$\limsup_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log^2 p_n}=1.$$

孪生素数猜想预测了相邻素数的小间隔，而 Cramér 猜想则刻画其大间隔。张益唐的重要工作表明

(2) $$\liminf_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)\le 70000000.$$

在张益唐之前，人们只能证明形如

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log n}=0$$

的结果，这归功于戈德斯通、品茨和伊尔迪里姆（D. A. Goldston，J. Pintz 和 C. Y. Yıldırım，以下简称为 GPY）在本世纪初的贡献。张益唐创造性地融合了傅黎（É. Fouvry）和伊万尼茨（H. Iwaniec）等人关于超越邦别里 – 维诺格拉多夫定理（Bombieri–Vinogradov Theorem）并挑战广义黎曼假设的哲学，以及希斯布朗等人关于脆数模代数型指数和的 van der Corput 方法，于是从质的角度打破了传统的广义黎曼假设所预测的极限。换言之，张益唐证明了关于素数在算术级数中分布的某种强形式的均值定理，并结合他所改造的筛法框架，从而证明了 (2) 式。邦别里 – 维诺格拉多夫定理是素数分布的一个里程碑式的结果，由意大利数学家邦别里（E. Bombieri，1974 年菲尔兹奖得主）和前苏联数学家阿•维诺格拉多夫（A. I. Vinogradov）于 1965 年独立证明，并在平均意义下往往可以替代广义黎曼假设。然而不幸的是，这样强有力的工具似乎无法证明形如 (2) 式的结论。这在张益唐工作出现之前是数学界的共识，并且主流数学界曾坚定地认为当前的数学工具不足以证明 (2) 式。张益唐凭借他对于筛法原始面貌的


张益唐


戈德斯通


品茨


伊尔迪里姆

深刻理解以及代数几何方法的卓越运用，成功地证明了另一种形式的均值定理，并在平均意义下超越了广义黎曼假设，从而实现了 (2) 式的证明。

如果说张益唐的工作使人们深刻认识到“莫要盲目迷信权威”，那么梅纳德的工作更让人感到“羞耻”：除了基于本世纪初所提出的 GPY 方法之外，其余所涉及的数学工具在上世纪六十年代就具备了；如果不计较 (2) 式中的定量常数，那么上世纪五十年代的解析数论也足以证明“相邻素数的有界间隔”。当然，人们对数学的理解总是步步为营的，有这种迂回曲折的现象也无可厚非。

用 ϖ 表示素数集合的示性函数，并考虑集合 k 元整数集合 $\mathcal{H}=\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}$. 张益唐研究了

$$\sum_{x<n\le 2x}\left(\sum_{1\le j\le k}\varpi(n+h_j)-1\right)\left(\sum_{d\mid(n+h_1)(n+h_2)\cdots(n+h_k)}\lambda_d\right)^2,$$

其中 x 为充分大的正数，λ_d 是某种形式的塞尔伯格筛法权函数，它在平均意义下可以“迫使”每个 $n+h_1$ 的素因子都比较少。对于集合 $\mathcal{H}$, 只要求它不能覆盖任一素数模的完全剩余系。实际上，上述框架是由 GPY 引入的，受到了塞尔伯格（A. Selberg，1950 年菲尔兹奖得主）早年关于孪生素数猜想工作的启发。但不同于 GPY 的是，张益唐同时要求 λ_d 的支集落于素因子都很小的脆数上。这是一个非凡的洞察，直接导致了他在均值定理中的突破。梅纳德则转而研究了 [1]

$$\sum_{x<n\le 2x}\left(\sum_{1\le j\le k}\varpi(n+h_j)-m\right)\left(\sum_{\substack{d_1,d_2,\cdots,d_k\ge 1\\ d_j\mid n+h_j,\forall j}}\lambda_{d_1,d_2,\cdots,d_k}\right)^2, \tag{3}$$

其中 m 为给定的正整数，$\lambda_{d_1,d_2,\ldots,d_k}$ 是某种形式的塞尔伯格筛法权函数。在 GPY

[1] J. Maynard, Small gaps between primes, *Ann. of Math.* (2) 181 (2015), 383–413.