



序曲

2021年10月是南京大学数学系的百年华诞，因为疫情影响，百年系庆大会延期于2022年6月5日举行。在此前的几个月里，南大数学系的“南数后花园”专设“百年南数栏目”，回顾百年来为数学系发展壮大贡献非凡的那些已故的著名教授。为了纪念对南大数学系做出突出贡献的前系主任叶彦谦教授，笔者也为此专栏撰写了《著名数学家叶彦谦教授》一文，读者的反应比较热烈。叶先生几乎在南大数学系成形时诞生，这“两个百年诞辰巧合”也就更加引入注目。在诸多友人的鼓励之下，笔者对该文做了较大篇幅的修改补充，完成了这篇文章，谨以此文献给叶师的百年诞辰。

我先略述叶彦谦教授的基本情况。叶先生是浙江开化县人，1923年11月3日生，2007年10月21日在南京逝世，享年84岁。他1944年7月毕业于浙江大学数学系，即留校任教，师从著名数学家陈建功和苏步青两位教授。1947年8月至1948年12月，他在中央研究院数学研究所任助理员，曾参加陈省身教授主持的拓扑学讨论班。1949年3月他回到浙大数学系任教，1950年升任讲师。1952年，在大学院系调整后，他到南京大学数学系任教，历任副教授、教授、博士生导师，直至1996年退休。这期间他曾任数学系微分方程教研室副主任、主任、数学系主任（1978-1982年）、数学研究所所长。他历任中国数学会第三届常务理事、江苏省数学会第二届副理事长。他曾被



聘为科学出版社现代数学丛书编委、上海科技出版社现代数学丛书编委、数学年刊编委、《应用数学学报》编委和《微分方程年刊》(*Annals of Differential Equations*) 副主编、主编等。

叶彦谦教授的研究领域为平面与曲面动力系统、初等数论等，著有数学论文数十篇和《极限环论》《曲面动力系统》《多项式微分系统定性理论》等三本专著。

求学之旅

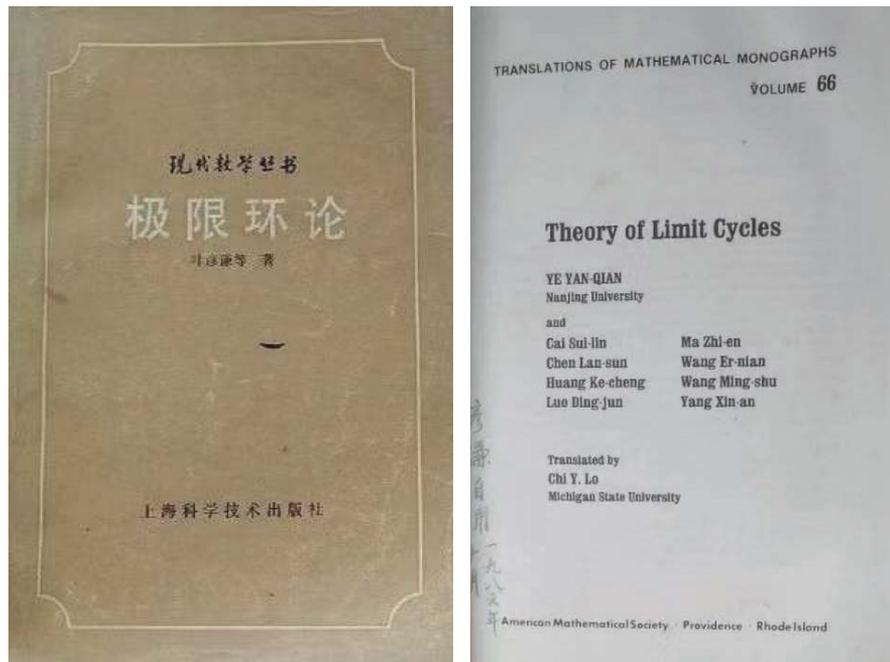
叶师出身于书香门第，祖父叶左文(1886-1966)为清末举人，担任过浙江省文史馆馆员，曾在北京图书馆编纂部任职多年，主要工作是校勘全部《宋会要》。他的父亲叶伯敬是浙江省名中医。他祖父的高贵品性与刻苦治学精神深深地影响了叶师，养成了他努力学习、不计名利地位、平等待人和爱好文史的优良习惯。抗日战争开始后，全家人只能靠父亲一人在衢州行医维持生活。从1940年到1942年，叶师在浙江大学龙泉分校读书，学校既不分科系，也无三、四年级，故1942年7月他们一大批流亡学生辗转经过闽、赣、粤、桂、滇五省，历经千辛万苦到达贵州湄潭，最后仅有6人在浙大数学系继续学业。叶师1944年7月毕业后留系任教，其间他写出一篇有创意的论文《有限可换群的子群个数》，经陈建功教授托段学复教授寄去美国，于1948年在 *Bulletin of the American Mathematical Society* 发表。在浙大两年的学习期间，他乡愁甚浓，课余常沉醉于吟诵古诗词。当时校舍旁的小学内常传来孩子们的歌声和伴奏的琴声，更激发同学们的思乡之情。记得上世纪80年代叶师曾和笔者回忆起那时的求学生活，以及他曾写就的一首名为“隔巷闻琴”的词：

寂寂山城湄水滨，思乡游子醉琴声，
曲名淡淡江南月，怎奈江南归未成，
顽寇灭，独夫奔，金陵胜地育新人，
勿闻凄侧哀弦语，回首当年泪满襟。

1947年秋叶师转赴上海中央研究院数学研究所任助理员，参加陈省身教授组织的讨论班，研读组合拓扑学、维数论和同伦论等方面的论著。他写出的一篇几何学方面的论文，经陈省身教授推荐发表在 *Journal of the London Mathematical Society* 上。

二次系统

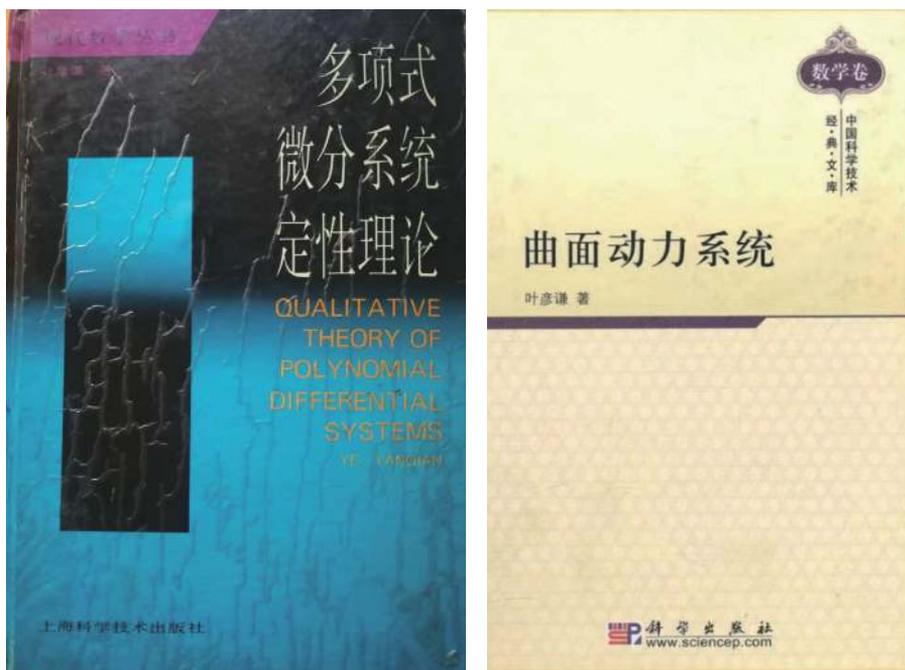
叶师的一生长期从事高等学校的教学与科研工作。调到南京大学后，他曾教授天文系和物理系的高等数学，这些学生质量很好，后来至少有七人成为中科院院士。



1952年后他曾参与翻译苏联的著名数学教材斯米尔诺夫的《高等数学教程》和菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》，为当时紧缺数学教材的中国高等教育做出了贡献。七十年代，他又编写的《常微分方程讲义》先后由人民教育出版社和高等教育出版社数度再版。

叶彦谦教授最重大的数学贡献是在关于常微分方程二次系统的研究上。叶师曾精读过庞加莱的原著《微分方程所定义的积分曲线》。我们知道什么是两个变元的多项式。常微分方程论中的平面多项式系统是指方程 $dy/dx = Y(x, y)/X(x, y)$ (其中 X, Y 为 x, y 的 n 次多项式，以下简称此方程为 n 次多项式系统)。当 $n = 1$ 时为线性系统，众所熟知，它和任意维数的线性代数方程系统一样可用初等方法求出其通解。但对 $n > 1$ 的非线性系统一般是无法求解的。由此庞加莱提出了定性方法，即从系统本身所具有的特点去研究其解可能具有的种种性态，这就是微分方程定性理论的基本思想。“极限环”是微分方程定性理论中的一个基本概念，顾名思义，它指的是方程的周期解，因为此解在相空间中的图像是空间里的一条像环一样的闭曲线。

在1900年举行的第二届世界数学家大会上，希尔伯特提出了著名的23个问题，其中第16问题的后半部分是问：上述 n 次多项式系统最多有几个极限环？它们的相对位置如何？1955年，苏联科学院院士彼得洛夫斯基和其学生朗基斯对 $n = 2$ 的二次多项式系统（以下简称二次系统）“证明”了最多只有三个极限环。这篇著名论文在苏联《科学院报告》(Доклады Академии Наук)上发表，激发了叶师对希尔伯特第16问题后半部分以及常微分方程定性理论研究的兴趣，此后一生致力于这一领域的研究，做出了极其丰富且杰出的贡献。众所周知，他和中科院数学所秦元勋教授、北京大学数学系张芷芬教授是国内最早从事这方面研究的先驱和开创者。



1957年叶师在《数学记录》上发表了第一篇研究二次系统的论文，得出其奇点、闭轨和极限环的一些性质。其后的二十多年间，国内同仁关于二次系统的论文有50余篇，其中大部分都收录在他的专著《极限环论》的参考文献中。1960年代起叶先生将二次系统分为由简到繁的I、II、III三类，此后同行们都称此为叶分类。文革前的几年叶师和他的学生们发表相关论文数十篇，首先解决了其中I类系统的极限环的存在性、唯一性，并对其轨线全局性态做出了完整的分析。为总结这方面的研究成果，他完成了《极限环论》这一专著，由上海科技出版社出版（1963年首版）。

文革后国内高校教学科研蓬勃发展，70年代后期起关于多项式系统的研究新成果不断涌现。叶先生组织了这方面成果较多的八位学者逐节修改《极限环论》，最后由他统稿于1984年再版，引起国际上的关注，1986年美国数学会委托密歇根州立大学数学系的罗志扬教授将其翻译成英文出版，1987年著名杂志*Bulletin of the American Mathematical Society*在7月号上对该书刊出书评，给以高度评价，自此《极限环论》一书成为全球广泛关注的这一研究方向的经典著作，大大促进了国际范围内对于希尔伯特第16问题后半部分的研究。

此后，叶先生和笔者合作，1980年开始研究环面多项式系统。1982年后又和研究生田景黄、陈一元、朱德明和韩茂安等对曲面动力系统的定性理论作系统研究，得出系列成果。叶师将这些成果加以总结，写成了《曲面动力系统》一书，1990年由科学出版社出版，它是国内这一方向少有的专著，获得了很高的赞誉，并于1992年获全国科技图书一等奖。

继《极限环论》第二版之后十年，为介绍国内外在这方面的新成果，叶先生收集了国际上的相关论文600余篇，总结写成《多项式微分系统定性理论》

一书，由上海科技出版社于1995年出版。全书共23节，其中9节都包含了作者自己的研究成果，这也是他自身科研工作的总结，其中最后一节还提出了若干问题和猜想，对后继研究者具有很多的启示和帮助。

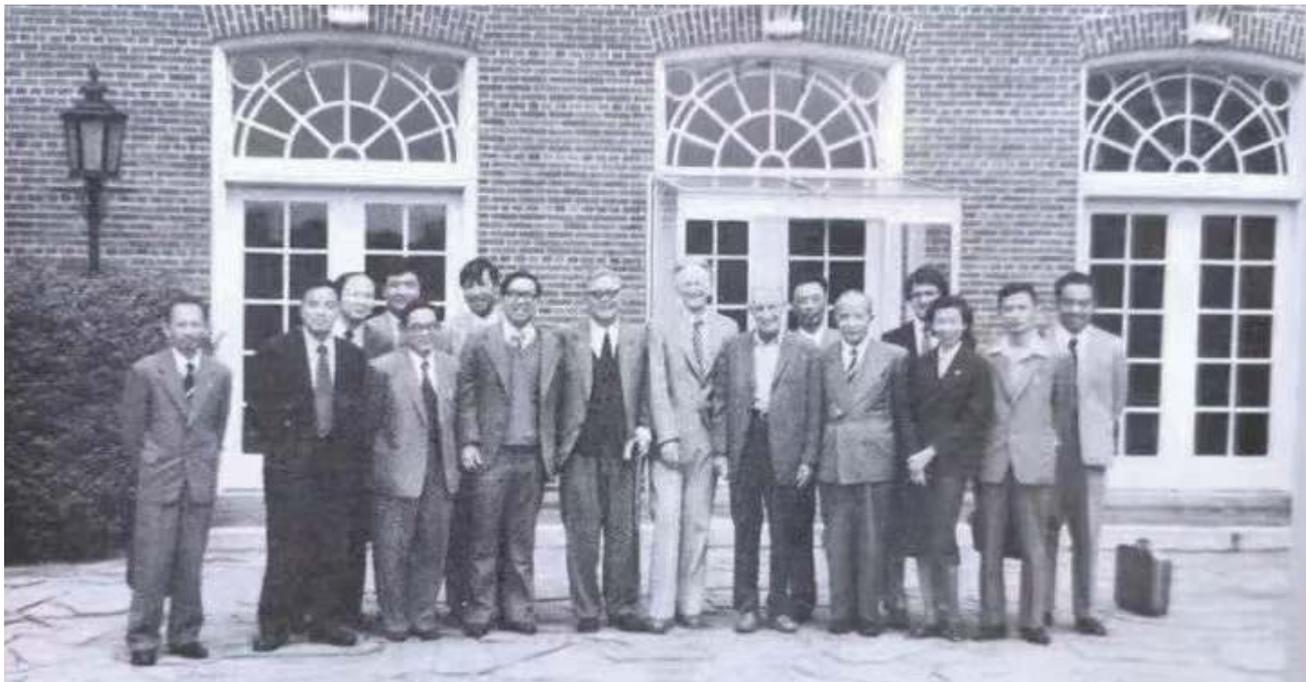
1996年叶师退休后，不再做常微定性理论与多项式系统的研究，把兴趣转向初等数论，陆续在多所大学的学报上发表相关论文十余篇。

国际交流

从上世纪80年代起，叶彦谦教授作为中国动力系统领域的一名领袖级人物，广泛参与了中外数学家的学术交流。改革开放后不久的1980年，他参加以华罗庚教授为首的中国数学家十人代表团，访问了美国20余所著名大学和研究所，认识了不少知名数学家，如黑尔（J. K. Hale）、马库斯（L. Markus）、巴特（R. Butt）、卡托克（A. Katok）和华裔数学家樊畿、周修义以及项武忠、项武义兄弟，还有应用数学家及物理学家林家翘和实验物理学家丁肇中等，受邀作过多次学术报告，最后回到加州大学伯克利分校参加了陈省身教授70寿辰祝寿会，并应邀在陈领导的讨论班作了一小时报告，得到很好的评价。

1982年末叶先生邀请美国 *Journal of Differential Equations* 主编、布朗大学的黑尔教授来南大讲学，国内许多院校的专家学者都来宁听讲，大大促进了中美学者的学术交流。

1983年，叶先生应邀去法国斯特拉斯堡大学讲学三个月，与马蒂内（J. Martinet）教授结为好友，邀请他到南京大学讲授他擅长的复动力系统研究，



1980年华罗庚等访问普林斯顿