拉格朗日点的计算

万精油

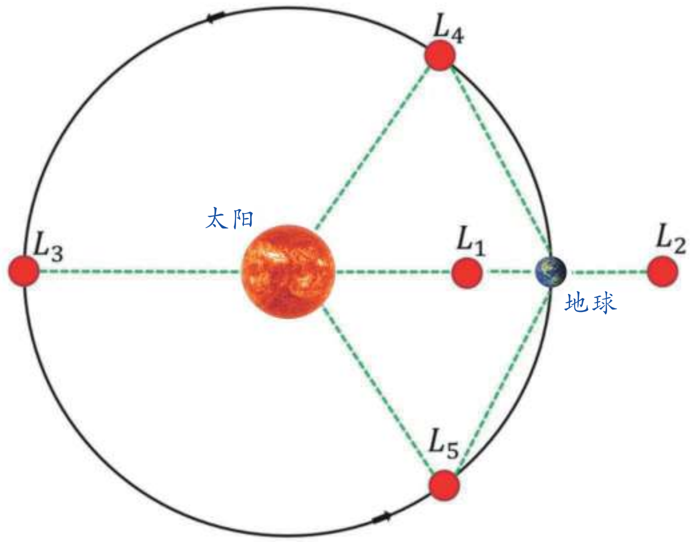
去年底，随着韦伯望远镜的升空，拉格朗日点成了一个热词。大家都知道拉格朗日点的定义，但是对于其具体计算还是不清楚。实际上，如果真正懂了定义，计算应该不是问题，所以归结起来还是没有完全懂得其定义。有好几个人问我具体定义与计算，给他们讲解以后我决定干脆把它写出来放到这里，或许别的人也会有兴趣。

拉格朗日点是一个三体问题。一般的三体问题没有简单解答，所以，拉格朗日点实际上是一个有限制的三体问题，三体中的一个的质量与另外两个比起来可以忽略不计（比如卫星与地球和太阳）。

在讨论拉格朗日点以前，我们先来看一个简单情况。在两个静止大质量物体（A, B）之间的连线上有另一个物体 C。如果 C 离 A 近，那么它受 A 的吸引力更大，C 就落向 A。反之，如果 C 离 B 近，那么它受 B 的吸引力更大，C 就落向 B。显然，在 AB 的连线上必然有一点，这个点受到 A，B 的吸引力相同，这个点上的物体就呆在那里，不向任何一方落去，这个点就是一个不动点。不过，这个不动点是不稳定的，稍微有一点扰动，这个平衡就被打破，物体就向某一方落去。

上面说的那个不动点与拉格朗日点 L_1 有点相似，L_1 也是两点连线之间的

一个不动点，不过 L_1 没有这么简单。因为空间中没有静止的东西，两个相近的物体一般来说都是一个绕着另一个转。这个时候的不动点就要考虑角速度。L_1 就是在这个意义下的不动点，角速度相同。就是说与地球绕太阳的公转同步。我们下面就来看一下如何根据这个定义来求出这个不动点的位置。



假设地球与太阳之间的距离是 R，L_1 离地球的距离是 μR, 离太阳的距离是 $(1-\mu)\ R$，太阳的质量是 S, 地球的质量是 E。在这些定义下，牛顿第二定理告诉我们，地球受太阳的吸引力是 GSE/R^2。开普勒定律说，一个物体绕另一个物体转，离心力与角速度 ϖ 之间的关系是

$$F = m\varpi^2 R.$$

其中，m 是物体的质量。对地球绕太阳转来说，$m = E$, 我们有

$$GSE/R^2 = E\varpi^2 R,$$

也就是

$$\varpi^2 = GS/R^3,$$

这个 ϖ 就是地球绕太阳公转的角速度。

我们再来看处于 L_1 的质量为 m 的小物体绕太阳公转的速度。一般来说，一个物体离另一个物体越近，那么绕它旋转的时候就越快，因为需要用更大的离心力来平衡更大的重力吸引力。按道理，处于两点连线上的点离太阳更近，应该旋转更快。但是，太阳与地球之间连线上的物体同时受太阳与地球的吸引，距离分别为 $(1-\mu)\ R$ 和 μR，吸引力为

$$GmS/((1-\mu)\ R)^2 - GmE/(\mu R)^2.$$