



本文是笔者在纪念钱敏先生逝世3周年的学术传承研讨会上的报告底稿，拟以笔者的教育、学术经历为主线，追思钱敏先生在动力系统方向对笔者产生的影响，回忆他的相关教育与学术思想以及人文精神。限于个人视角和记忆偏差等原因，有关回忆与陈述或有错漏，敬请诸位同门与朋友不吝指正。

## 1. 师生缘起

钱敏先生1927年3月出生于江苏无锡，1944–1946年就读于成都金陵大学，1946–1949年就读于清华大学；之后历任北京大学讲师、副教授、教授，2013年获得第十一届华罗庚数学奖；2019年4月26日在北京安然离世，享年93岁。

我是1995年入学北大概率统计系读本科，期间一度与几位同班同学想转至基础数学系；后来我放弃了转系，而与此同时我的另一位同学曾焰则转入了基础数学系。“初识”钱敏先生也是通过我的这位同学与朋友；那时钱先生已经退休，但仍然义务担任了本科生的指导老师，在1997–1998年指导了曾焰所在班级的一个讨论班。曾同学上完课回来立即很兴奋地向我们描述了先生引导讨论班同学把泛函分析I、II课程中的一些抽象化的定理返回到有限维欧氏空间来看其原型，由此理解、品味高深数学理论中的具象与抽象，从平凡现象与事实中挖掘不平凡，大发感慨，既叹先生眼界学识、又仰先生风骨。由是我顿生钦慕之心，也算是“初识”先生了。

后来我被保送读研究生，在大四这年提前参加了钱敏平教授和钱敏先生（及刘培东教授）分别组织的两个研究生讨论班：一是生物信息讨论班，一是动力系统讨论班。最终我发现自己的兴趣不在生物信息方向，在研究生阶段就彻底投入到动力系统讨论班去了；由此开始真正结缘受教于先生。

## 2. 上世纪末国内外有关动力系统方向的时代背景

钱敏先生带领的学术群体通常在学界被称为 Qian Group 或 Qian's School。先生在动力系统方向的研究旨趣是与统计物理和热力学结合起来的。先生退休后，在北大仍常年主持研究生的讨论班，讨论的课题大多与统计物理和热力学有关。

当时北大动力系统的研究群体大致有三个：

- (1) 廖山涛院士（1920–1997）领导、后由文兰院士接替领导的微分动力系统团队。他们的研究对象一般是微分同胚或微分方程确定的流，关心的重点是有关结构稳定性理论等；
- (2) 丁同仁先生（1929–2014）与张芷芬教授领导的微分方程定性理论团队；
- (3) 钱敏先生（1927–2019）领导的（随机）动力系统团队。这个团队的研究对象既包含确定性动力系统，又包含随机动力系统，而关心的问题则偏向于统计物理和热力学的有关问题。

当然，这几个研究团队的研究旨趣也经常有重叠交叉与相互交流，并没有绝对的分野。譬如孙文祥教授及其指导的学生的一系列研究与刘培东教授和我的研究旨趣相合。而钱敏先生早期也做过有关微分方程的定性理论研究，并与张锦炎老师合作出版了《微分动力系统导引》一书。



图 1. 张锦炎、钱敏合著《微分动力系统导引》封面

以下仅回顾随机动力系统、特别是光滑遍历理论方面的有关情况。

在国际上，随机动力系统的研究脱胎于确定性动力系统的研究。其中某种意义上第一个基础性的工作当然是欧瑟勒兹（Valeriy Oseledets）的乘法遍历定理（1968），这个定理引出了微分动力系统中重要的量——李亚普诺夫（Lyapunov）指数；许多知名学者，如偌温纳汉（Madabusi Raghunathan, 1979）、吕埃勒（David

Ruelle, 1979)、戈德谢德和马尔古利斯 (I l i a Goldsheid & Grigory Margulis, 1989)、路德维希·阿诺德 (Ludwig Arnold, 1998) 等, 都给出过这一定理的证明及推广<sup>1</sup>。据孙文祥教授介绍, 廖山涛院士早在 60–70 年代就用他自己发展的另一套完全不同的技巧给出过这个结果的证明<sup>2</sup>。

之后, 西奈 (Y. Sinai) 给出了欧瑟勒兹的乘法遍历定理的一个重要应用, 对二维轮胎面上的“线性”微分同胚<sup>3</sup>以及体积测度建立了第一个联系李亚普诺夫指数的熵公式; 这一公式被佩辛 (Yakov Pesin) 发展到一般紧流形  $M$  上, 建立了微分同胚的 Pesin 熵公式: 设  $f: M \rightarrow M$  是  $C^{1+\alpha}$  微分同胚, 当  $f$ -不变测度  $\mu \ll$  勒贝格测度时, 保测系统  $(M, \mu; f)$  的熵与李亚普诺夫指数满足下面的关系

$$h_{\mu}(f) = \int \sum_i \lambda_i(x)^+ m_i(x) d\mu(x), \quad (1)$$

其中  $m_i(x)$  是李亚普诺夫指数  $\lambda_i(x)$  的重数 (multiplicity)。从此学者们开始探索以下问题:

- (a) 微分同胚 (或自映射) 能容许绝对连续于体积测度的不变测度的条件;
- (b) Pesin 熵公式的等价刻画;
- (c) 是否有更一般的熵公式?

围绕问题 (a), 诸多学者研究过 Anosov 系统、公理 A 系统、扩张自映射等; 其中鲍恩 (Rufus Bowen)、吕埃勒有重大贡献, 发现了其中的一种所谓的物理测度 (作为关于体积测度绝对连续的不变测度的一种推广对象): Sinai–Bowen–Ruelle 测度<sup>4</sup>。围绕问题 (b), 佩辛、鲍恩、吕埃勒、莱德拉皮耶 (François Ledrappier)、杨丽笙 (Lai–Sang Young) 等人取得了诸多成果, 最终由莱德拉皮耶和杨丽笙用两篇文章彻底解决了问题 (b) 与 (c):

$$\text{Pesin 熵公式 (1) 成立} \Leftrightarrow \mu \text{ 是 SBR 测度}, \quad (2)$$

而当  $\mu$  仅仅是不变测度时, 下面的莱德拉皮耶–杨丽笙公式成立:

$$h_{\mu}(f) = \int \sum_i \lambda_i(x)^+ \gamma_i(x) d\mu(x), \quad (3)$$

其中  $\gamma_i$  是  $\mu$  的一种分形维数 (称为横截维数), 可以不是整数。

<sup>1</sup> 有关证明与推广工作的一个目的是探讨李亚普诺夫指数的连续性等分析性质; 蒋达权、刘培东与钱敏先生也有此方面的讨论 (Manuscripta Math. 108(1) (2002), 43–67)。

<sup>2</sup> 参见 2020 年孙文祥教授在“纪念廖山涛先生诞辰 100 周年暨微分动力系统研讨会”上所作报告等。

<sup>3</sup> 例如  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  诱导的  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  上的微分同胚。

<sup>4</sup> 当时, 我们围绕问题 (a) 在讨论班上学习过 Lasota–Mackey 的专著。我目前在复旦的同事沈维孝教授在问题 (a) 方面亦有杰出工作; 但这是后话了。

### 3. Qian Group 对光滑遍历理论的发展

到上世纪 80、90 年代左右，确定性微分同胚的佩辛理论已经成型，人们逐渐开始关注并建立随机微分同胚（随机动力系统）的有关理论。早期随机动力系统的光滑遍历理论的结果散布于诸多文献。钱敏先生与刘培东教授在进入这一领域并做出了一些研究成果的过程中发现，有不少相关文献具有细节性的瑕疵；这诸多的瑕疵汇集起来，就造成了后人在进入这一领域时以及继续推进相关研究上的障碍。有鉴于此，钱敏先生就建议刘培东教授在自身已有工作的基础上开始系统整理随机动力系统的光滑遍历理论方向的文献；他们花了三年多时间，最终在 1995 年通过斯普林格出版社出版了专著 *Smooth Ergodic Theory of Random Dynamical Systems*，在国际上产生了重要影响。刘培东教授在他们合作的专著基础上，后来继续做出了更多优秀的工作。

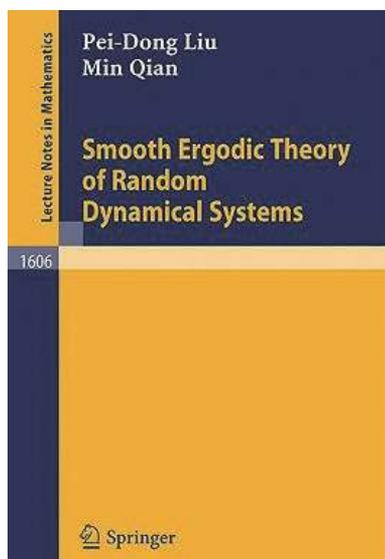


图 2. 刘培东、钱敏合著 LNM1606 封面

那时，确定性动力系统（微分同胚）的莱德拉皮耶-杨丽笙公式（见 (3)）已经建立；特别地，杨丽笙本人（1982）在二维情形就已经证明了弱双曲微分同胚的不变测度的维数正则性（exact-dimensionality）。由此 1985 年埃克曼（J.-P. Eckmann）和吕埃勒提出了他们著名的维数猜测——Eckmann-Ruelle 猜测；这个维数猜测与分形理论有非常重要的联系：当不变测度的点维数（local dimension）具有维数正则性（即几乎处处为常数）时，相应的很多分形维数也就等于这个点维数。佩辛本人也是分形理论方面的专家，他在 1997 年出版了专著 *Dimension Theory in Dynamical Systems*；国内分形理论方面的重要专家团队则是文志英教授带领的团队<sup>5</sup>。围绕 Eckmann-Ruelle 猜测，据说在国外

<sup>5</sup> 不过我当时尚是本科生，那时并没有认识到这一点。