“拉马努金复生才能解决”：E_8 格与装球问题

倪 忆

2022 年 7 月 5 日，乌克兰数学家马林娜 • 维亚佐夫斯卡（Maryna Viazovska）获得菲尔兹奖，成为第二位获得菲尔兹奖的女数学家，也是第二位出生在乌克兰的菲尔兹奖得主。她获奖的主要工作是解决了 8 维空间中的装球问题：当 8 维空间中的球按照 E_8 格的方式堆积起来时，装球密度最大。她还与人合作解决了 24 维空间中的装球问题，这时最大密度是以利奇格的堆积方式取得。

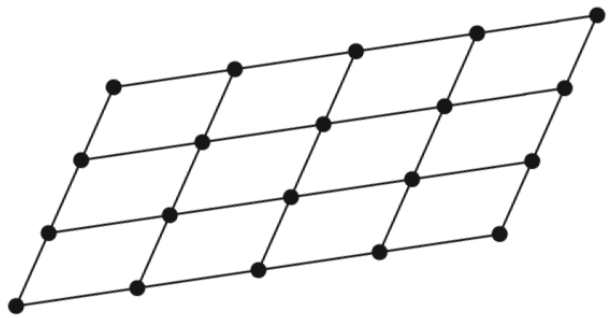
维亚佐夫斯卡（图源：EPFL）

这一获奖工作可谓是菲尔兹奖里少有的接地气的成果，普通人都能理解她到底证明了什么。从数学上说，她的获奖工作再次向世人展示了 E_8 格（以及利奇格）的重要性。那么，什么是 E_8 格？它又如何同装球问题联系起来的呢？

什么是格？

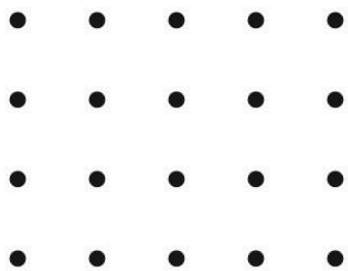
格（lattice），是大数学家高斯所定义的一个数学概念。我们拿二维格作为例子来说明格的定义。取一个平行四边形，将它平行移动，可以得到无数个同

样形状和大小的平行四边形，使得它们铺满平面。这些平行四边形的顶点构成的集合就叫做一个二维格。



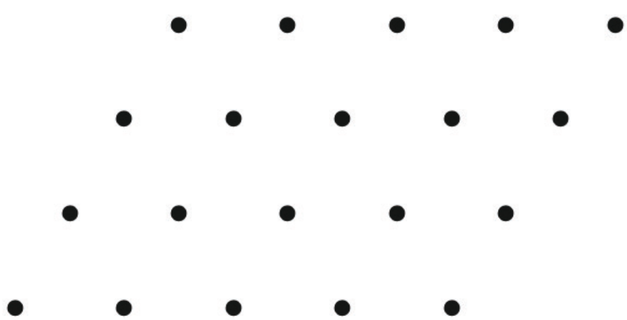
平行四边形的顶点构成一个二维格

最常见的二维格由平面上所有整点组成，也就是说，这些点在直角坐标系里的横纵坐标都是整数。相应于这一格的平行四边形就是边长为 1 的正方形。我们管这个格叫做正方形格。



正方形格

如果平行四边形由两个边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形拼成，得到的格称为六边形格。

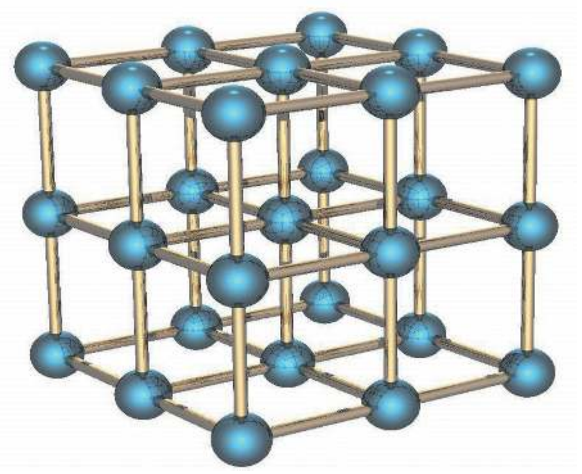


六边形格

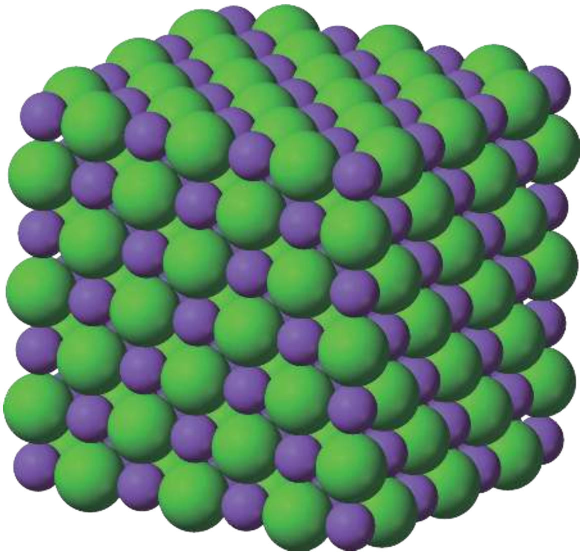
类似于平面格，在三维空间，我们可以用平行六面体平移堆满空间，平行六面体的顶点的集合就是一个三维格。

当这个平行六面体是正方体时，对应的格叫做简单立方格。在简单立方格的基础上，再添加每个立方体各个面的中心，得到的格叫做面心立方格。

在许多晶体中，原子或者分子就是按照格的方式来排列，所以化学家们经常要跟格打交道。例如 α 相的固态钋的晶体结构是简单立方结构，而常见的氯化钠（食盐）晶体里的氯原子是按照面心立方格方式排列。



固态钋的 α 相结构（图源：维基百科）



氯化钠晶体结构，其中绿色大球表示氯原子（图源：维基百科）

不过，晶体学中所说的 lattice 跟我们这里的格不完全一样，例如晶体学中常见的密排六方晶格就不是我们所说的格。我们所说的格，在晶体学中被称为 Bravais lattice。

高维空间中的格可以类似地定义。不过，为了叙述的简洁，我们采用线性代数的语言。

如果读者学过线性代数，应该知道 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 可以看作一个向量空间，或者说线性空间。这个向量空间的一组基就是 n 个向量

$$v_1, v_2, \cdots, v_n,$$

使得向量空间中任何一个向量可以用唯一的方式表示为这 n 个向量的实系数线性组合，即

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

的形式，其中每一个系数 k_i 都是实数。

现在给定一组基，如果我们限定上式中的系数 k_i 都是整数，那么这样得到的所有向量的集合就叫做一个格。格中的向量（也可看作空间中的点）则称为格点。

独一无二的 E_8 格

我们要谈到的 E_8 格是一个非常特殊的 8 维格。为了说明它为什么特殊，我们需要一些进一步的关于格的概念。

在线性代数里，两个向量

$$v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

和

$$w = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

的内积是一个数

$$(v, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

如果一个格中任何两个向量的内积都是整数，那么这个格就被称为整格。在这个定义里，当两个向量是同一个向量时，它们的内积就是向量长度的平方。所以整格中任何一个向量长度的平方都是整数。换句话说，整格中任两个格点之间距离的平方都是整数。

在平面上，整格也可以用相关的平行四边形的几何来定义：如果平行四边形每条边长度的平方都是整数，并且两条对角线长度的平方差是 4 的整数倍，那么这个格就叫做整格。

读者可以验证前面提到的正方形格和六边形格都是整格。

在一个整格中，如果每个向量的长度的平方都是偶数，那么这个格叫做偶格。在二维格里，前述条件等价于要求平行四边形每条边长度的平方都是偶数。

正方形格边长的平方是 1，所以正方形格不是偶格。六边形格边长的平方是 2，所以六边形格是偶格。

在格定义中，作为基的这组向量

$$v_1, v_2, \cdots, v_n,$$

构成一个方阵

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

如果这个方阵的行列式是 ± 1，这个格就叫做一个幺模格。

在二维的时候，上面这个方阵的行列式的绝对值就是相应平行四边形的面积；在三维时，行列式的绝对值是相应平行六面体的体积。

正方形格对应的正方形面积是 1，所以正方形格是幺模格。六边形格对应的菱形的面积是 $\sqrt{3}$，所以六边形格不是幺模格。

总结一下，正方形格是幺模格，但不是偶格；六边形格是偶格，但不是幺模格。那么，平面上有没有一个整格，既是偶格又是幺模格的呢？

不难证明，这样的平面格不存在。事实上，假设平行四边形两组对边的长度的平方分别是 a 和 b，两条对角线的长度的平方差是 $4d$，那么平行四边形的面积就是 $\sqrt{ab-d^2}$。如果这个格是幺模格，那么

$$ab - d^2 = 1.$$

如果这个格还是偶格，那么 a 和 b 都是偶数，这样 $d^2 = ab - 1$ 被 4 除的余数是 -1，跟 d 是整数矛盾。

平面上没有幺模偶格，在高维有吗？我们可以考察三维、四维……要一直到八维才会出现第一个幺模偶格，这就是 E_8。

E_8 格可以这样定义：它由 $\mathbb{R}^n$ 里满足如下两个条件的点组成：第一个条件是，全部 8 个坐标的和是偶数；第二个条件是，所有坐标要么都是整数，要么都是半整数（即某个奇数的一半）。

例如

$$(1,1,1,1,0,0,0,0)$$

和

$$(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

在这个格中。但

$$(1,1,1,0,0,0,0,0)$$