直纹面的折纸设计与实现

孙 蕾 谷德峰

折纸是一种以纸张折成各种不同形状的艺术活动，流传已久，颇受民众喜爱。早在 2000 多年前的西汉时期，为寻找笨重的竹简和昂贵的绸帛的替代品来记录文字，中国古代劳动人民发明了造纸术。东汉时期蔡伦采用树皮、麻头、敝布、鱼网等原料，经过挫、捣、炒、烘等工艺改进了造纸术，制造出原材料更便宜，质量更高的纸。折纸艺术随着造纸术的传播，逐渐形成并发展起来。19 世纪，折纸艺术与自然科学结合到一起，开始在西方成为教育教学和科学研究的工具。随后折纸与数学研究相结合，发展为折纸几何学，成为现代几何学的一个分支。

欧几里得的《几何原本》把人们公认的一些事实列成定义和公理，以形式逻辑的方法研究各种几何图形的性质，从而建立了一套从公理、定义出发，论证命题得到定理的几何学论证方法，形成了一个严密的逻辑体系——几何学。类似于《几何原本》中的公理逻辑体系，1991 年，日裔意大利数学家藤田文章（Humiaki Huzita）给出了折纸过程中的 6 种基本操作，称为折纸几何公理。

公理 1 已知 A、B 两点，可以折出一条经过 A、B 的折痕。

公理 2 已知 A、B 两点，可以把点 A 折到点 B 上去。

公理 3 已知 a、b 两条直线，可以把直线 a 折到直线 b 上去。

公理 4 已知点 A 和直线 a，可以沿着一条过 A 点的折痕，把直线 a 折到自身上。

公理 5 已知 A、B 两点和直线 a，可以沿着一条过点 B 的折痕，把 A 点折到直线 a 上。

公理 6 已知 A、B 两点和直线 a、b，可以把 A、B 两点分别折到直线 a、b 上。

2001 年，日本数学家羽鳥公士郎（Koshiro Hatori）补充了第 7 条公理。

公理 7 已知点 A 和直线 a、b，可以沿着一条垂直于 b 的折痕，把 A 折到 a 上。

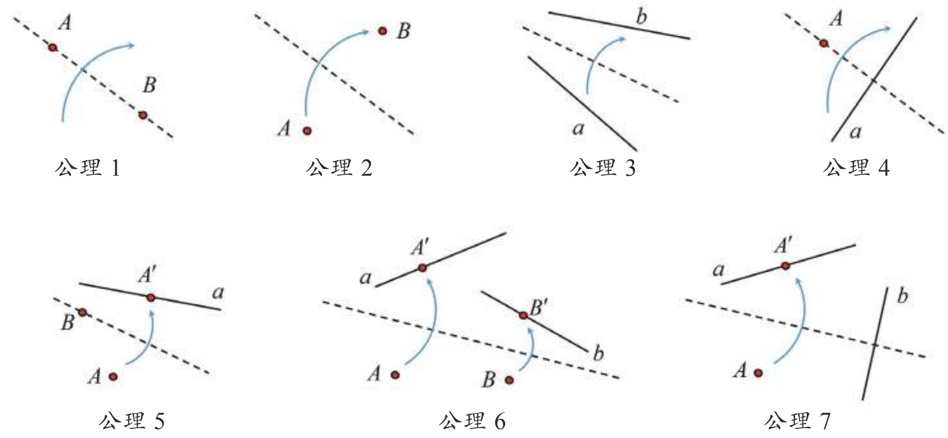

图 1. 折纸几何公理

至此，这 7 条公理（如图 1）合称为藤田一羽鳥公理（Huzita–Hatori 公理）。2003 年，世界顶级折纸艺术家罗伯特 • 朗（Robert J. Lang ）对这些公理进行了整理和分析，在假定所有折纸操作均在理想的平面上进行，并且所有折痕都是直线的情况下，证明了这 7 条公理包含了折纸几何中的全部操作。具体说来，折纸几何的本质问题是确定折痕。折纸包括以下五个基本行为 ：

1、把已知点折到已知点上 ；
2、把已知点折到已知直线上 ；
3、把已知直线折到已知直线上 ；
4、把已知直线折到自身重合 ；
5、折痕经过已知点。

以上行为中，1 和 3 可以直接确定折痕，2、4 和 5 则需要组合才能确定折痕。例如公理 7 可以分解为两个行为 ：I. 把已知点 A 折到已知直线 a 上 ；II. 把直线 b 折到自身重合。这正好对应行为 2 和 4，将这种行为的组合记为 (2,4)。行为 2、4 和 5 的组合分别为：(2,2)，(2,4)，(2,5)，(4,4)，(4,5) 和 (5,5)。其中，(4,4) 的组合是不可能实现的。因为把两条已知直线折到自身重合，如果两直线不平行是不可能实现的；如果平行，则有无数条折痕。于是只需要实现 1（公理 2），3（公理 3），(2,2)（公理 6），(2,4)（公理 7），(2,5)（公理 5），(4,5)（公理 4）和 (5,5)（公理 1）这七种组合就能实现所有的折纸操作。这七种操作正好对应于 7 条折纸公理，形成了完备的折纸几何体系。

折纸几何学在某些方面有其独到的优势。例如，《几何原本》中定义的尺规作图无法实现三等分角问题（将任意给定的角度三等分）和倍立方体问题（作立方体，使其体积正好是给定立方体的两倍），而通过严格的数学证明，它们都可以利用折纸几何中 7 条公理定义的操作来解决。

直纹面是直线在空间中移动，扫过形成的曲面，它是几何学中一类重要的曲面。直线在空间中移动充满着流动的韵律感，由直线生成的曲面结构简单且

图 2. 星海音乐厅

图 3. 广州塔“小蛮腰”

易于实现。因此，直纹面的简洁与美丽使其在现代建筑设计中得到了广泛使用。飞檐翘角的星海音乐厅如天鹅展翅（如图 2），立柱交织成网格状的广州塔如亭亭玉立的少女伫立江边（如图 3），它们都是将直纹面用于建筑设计的经典作品。折直线是折纸最基本的操作，因此直纹面也可以通过折纸来轻松实现。下面我们将逐一介绍几种常见的直纹面如何通过折纸来实现。

为分析直纹面的几何特征，首先给出直纹面用数学语言的精确描述，其定义如下：

定义 1 如果曲面 S 的参数表示为

$$r(u,v) = \rho(u) + v\tau(u) \tag{1}$$

其中，$\rho(u)$ 和 $\tau(u)$ 是光滑向量函数，并且 $\tau(u) = 0$，则称该曲面是直纹面。

由直纹面的参数表示知：当 u 固定时，其描绘的是一条直线，称为直纹面的母线，$\tau(u)$ 为母线的方向。当 $v = 0$ 时，描绘的是一条曲线 $r = \rho(u)$，称为直纹面的准线。可见直纹面是沿准线光滑变化的直线族。该直线族中的每一条直线全在曲面 S 上，并且曲面 S 上的每个点都在这一族的某一条直线上。

1 柱面

在（1）式中，若 $\tau(u) = \tau$ 是常向量，则称曲面

$$r(u,v) = \rho(u) + v\tau$$

为柱面，如图 4 所示。

特别地，取 $\rho(u) = (R\cos u, R\sin u, 0)$，$\tau = (0,0,1)$，则曲面为圆柱面。