



冯·诺依曼最重要的数学遗产 ——算子代数及其现代发展

范明

Neumann János Lajos

算子代数是泛函分析中一个重要的研究领域，近几十年以来蓬勃发展，在表示论、微分几何、非交换几何、纽结理论、量子统计力学、量子信息和量子场论中获得广泛应用。算子代数是拓扑向量空间上连续线性算子的代数，特指由可分希尔伯特空间上有界线性算子组成的自共轭代数，其乘法由算子的复合运算给出。由于空间是无穷维的，因此要求算子代数在一定的拓扑下封闭。通常研究的算子代数包括一致闭的 C^* -代数和弱闭的冯·诺依曼代数(或抽象的 W^* -代数)，冯·诺依曼代数是一类特殊的 C^* -代数。在现代算子代数理论中，许多概念和理论均起源于约翰·冯·诺依曼极具前瞻性的思想和工作。

"If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is."



JOHN VON NEUMANN
(1903 - 1957)

约翰·冯·诺依曼原名诺依曼·亚诺什·拉约什 (Neumann János Lajos)，是出生于匈牙利的犹太裔美籍数学家。冯·诺依曼是理论计算机科学与博弈论的奠基者，在集合论、泛函分析、遍历理论、算子代数、几何学、拓扑学和数值分析等众多数学领域以及计算机科学、量子力学和经济学中均作出了基础性贡献。他将量子力学最重要的基础严格公理化，被誉为“在纯数学和应用数学方面同样游刃有余的伟大数学家的最后代表”。冯·诺依曼一生中发表了大约 150 篇论文，本文无法涵盖他的所有成就，仅简单介绍其生平，特

别是关于算子理论和算子代数的工作及其现代发展。冯·诺依曼有一句名言：“如果人们不相信数学的简单，只因他们没有意识到人生的复杂。”

从布达佩斯到普林斯顿

1903年12月28日，冯·诺依曼出生于布达佩斯一个富裕、不守旧的上层犹太家庭。他是诺依曼·米克萨（Neumann Miksa）和坎恩·玛吉特（Kann Margit）的三个孩子中最大的一个，今年12月28日是他诞生120周年纪念日。匈牙利语属于乌拉尔语系芬兰-乌戈尔语族，在匈牙利语中，姓在前名在后，冯·诺依曼出生时的名字 János Lajos 对应于英语中的 John Louis。他的父亲诺依曼·米克萨是一名银行家，拥有法学博士学位。1913年诺依曼·米克萨被奥匈帝国皇帝弗朗茨·约瑟夫（Franz Joseph）授予世袭贵族头衔，以表彰他对奥匈帝国的贡献，这样在奥地利和德国他的后代就可以“冯·诺依曼”（von Neumann）作为姓氏。

1873–1918年间，布达佩斯与维也纳一起，是当时奥匈帝国的共同首都，冯·诺依曼在这个城市出生长大。2022年10月，笔者前往布达佩斯，拜谒了冯·诺依曼的故居和大学母校。冯·诺依曼出生时，他的家人住在佩斯犹太区的历史街道——巴托里街（Báthory utca）26号的一套公寓中，他在那里一直住到18岁。这条街是以16世纪后期当选为波兰国王和立陶宛大公的匈牙利贵族后裔伊斯特万·巴托里（István Báthory）的名字命名，冯·诺依曼故居外墙挂有匈牙利数学会和美国数学会联合建立的纪念牌匾。匈牙利数学会以该国19世纪著名数学家鲍耶·亚诺什（Bolyai János）冠名，他与俄罗斯数学家罗巴切夫斯基同为非欧几何中双曲几何的创始人。



布达佩斯巴托里街的冯·诺依曼故居（笔者摄）

冯·诺依曼是一个神童，自幼拥有超强的记忆力。他的家庭混合了犹太教和基督教的传统，他少年时代在家中接受私人教师的教育。10岁时冯·诺依

曼进入布达佩斯著名的路德会法索里福音中学读书，数学老师为他开设了特殊课程。18岁起他先后进入柏林大学和苏黎世联邦理工学院学习化学工程，后来又注册为布达佩斯大学数学研究生。在苏黎世期间，冯·诺依曼与数学教授赫尔曼·外尔和乔治·波利亚合作，将大部分业余时间都花在数学问题上，在每个学期末前往布达佩斯参加数学课程考试。冯·诺依曼于1925年获得化学工程师文凭，1926年通过数学博士答辩。他的博士论文《一般集合论的公理化结构》是用匈牙利文撰写，发表在德国著名的《数学杂志》上。

博士毕业后，冯·诺依曼获得洛克菲勒奖学金，前往哥廷根大学，在希尔伯特指导下从事一年博士后研究。1927年，他获得Habilitation“特许任教资格”，先后在柏林大学和汉堡大学担任无薪讲师。冯·诺依曼以平均每月撰写一篇论文的速度，涉足多个数学领域，他的很多原创思想都可在这一时期找到源头。冯·诺依曼的名声很快在全世界数学界传播开来，“大多数数学家证明他们能做到的，而冯·诺依曼则证明他想要的”，这是那个时代数学家中流行的一句话。他于1930年应邀为普林斯顿大学客座教授，一年后转为正式教授。1933年，不满30岁的冯·诺依曼与爱因斯坦等共六位科学家成为普林斯顿高等研究院最初的终身教授，同年希特勒在德国上台。

在普林斯顿任职期间，冯·诺依曼继续与欧洲学术界保持密切联系。他每年都要回到欧洲度假，其间两次访问波兰利沃夫学派，直到二战爆发。1928年，冯·诺依曼发表了关于零和博弈极大极小定理的论文《客厅博弈论》。后来在维也纳学派的研讨会上，他首次给出了关于一般竞争均衡存在的纯拓扑证明，他的有关多部门经济扩张模型的论文发表在研讨会的论文集上。1930年，冯·诺依曼与玛丽埃特·科维西（Mariette Koevesi）结婚，育有一女，1937年和平分手，冯·诺依曼加入美国籍。第二年他迎娶了克拉拉·丹（Klara Dan），冯·诺依曼为两人的爱犬取了一个数学名字“逆元”（Inverse），第二次婚姻一直持续到他生命的尽头。



左二：冯·诺依曼，左四：爱因斯坦，左五：摩根施特恩（1952，flex-design.net）

由于二战期间国际形势的变化，冯·诺依曼将更多精力投入应用数学，把严格的数学理论用于流体动力学、弹道学、气象学、博弈论和统计学等领域。他参与曼哈顿计划，解决了涉及热核反应和氢弹的核物理学中的关键步骤。在其1928年的《客厅博弈论》及维也纳研讨会论文的基础之上，冯·诺依曼与经济学家奥斯卡·摩根施特恩（Oskar Morgenstern）合作撰写了博弈论的奠基之作《博弈论与经济行为》。他还是数字计算机概念发展的关键人物，起草了计算机史上的里程碑文献“101页报告”，明确规定用二进制代替十进制，成为后来计算机开发的圣经。1957年2月8日，53岁的冯·诺依曼因癌症去世，这个世界失去了最原创、最敏锐、最智慧的大脑。

最高的那一块石碑

冯·诺依曼的博士母校布达佩斯大学是匈牙利最早的大学，成立于1635年，现名罗兰大学（Eötvös Loránd University）。2003年冯·诺依曼诞辰百年之际，匈牙利信息和新闻传播部、诺依曼·亚诺什计算机科学学会等机构联合在罗兰大学校园里为他竖立了纪念碑。纪念碑由冯·诺依曼的胸像及刻有图案的高矮不一的四块石碑组成，代表他一生中四个主要的研究领域。从左至右为博弈论、数学、量子力学、理论计算机科学，其中代表数学的石碑是最高的一块，上方刻有希腊字母 π 。冯·诺依曼在晚年提交给美国国家科学院的一份简历中，将量子力学、算子理论、遍历定理列为自己一生中最重要的工作，而这几个领域又是紧密相关的，冯·诺依曼是极少数能够在数学与物理、科学与人文这几种不同文化之间自由切换的人。



布达佩斯罗兰大学的冯·诺依曼纪念碑（笔者摄）

冯·诺依曼登场的时候，正是数学公理化运动方兴未艾的历史性年代，而