



纳维、斯托克斯 和他们的数学方程

陈关荣



日常生活中，起伏的波浪、湍急的气流都会对我们的出行工具如飞机和轮船产生影响。数学家和物理学家们认为无论是风还是湍流，都可以通过求解一个方程来对其影响进行解释和预测。

那就是千禧年大奖难题之一——纳维 - 斯托克斯方程



【一】

1998年，美国投资咨询与矿业金融大咖兰登·克雷（Landon T. Clay）捐助成立了克雷数学研究所。这间非盈利私立研究所在2000年5月24日宣布设置“千禧年数学大奖”，七大数学难题每项的奖金为一百万美元。其中，第四道难题是要证明流体动力学中最重要的“纳维 - 斯托克斯方程”（Navier-Stokes equation）是否有解且为唯一。这则新闻把一个艰深数学问题及其称谓广为普及，甚至传播到数学领域之外的大庭广众。

纳维 - 斯托克斯方程是描述粘性不可压缩流体动量守恒的运动方程组。该方程在不同条件下具有不同的形式。它在三维空间的一般向量表达式包括简单的线性质量守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 和复杂的非线性动量守恒方程

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \cdot \nabla)v = F - \nabla p + \mu \Delta v,$$

其中 v 为流体速度向量, F 为单位体积流体所受外力, p

为流体各向同性压力, ρ 为流体密度, μ 为动力粘性系数,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ 为梯度算子, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普

拉斯算子。

纳维 - 斯托克斯方程的发展经历了一个漫长的过程：

1775 年, 欧拉在论文“流体运动的一般原理”(Principes généraux du mouvement des fluides) 中根据理想无粘性不可压缩流体所受外力时的动量变化推导出了一组微分方程式。

1821 年, 克劳德 - 路易·纳维 (Claude-Louis Navier) 推广了欧拉方程, 考虑到流体内部分子之间相互作用力所产生的粘性, 特别是在靠边界层的粘性对流体显著影响, 建立了一个不可压缩流体动力平衡和运动基本方程式。

1827 年, 柯西在欧拉方程中引入流体微团应力张量的概念, 推导出一个“柯西动量方程”, 准确地描述了流体运动不同于固体运动的基本规律。

1831 年, 泊松建立了一个可压缩流体的运动方程。

1845 年, 乔治·斯托克斯 (George G. Stokes) 在纳维方程的基础上推导出了带常数粘性的不可压缩流体的动量守恒运动方程式, 也就是现在著名的“纳维 - 斯托克斯方程”。

在这近百年的接力研究过程中, 不少数学家和物理学家都在多个相关问题上作出过不同形式和不同程度的贡献, 包括在非粘性流体数学分析方面的约翰·伯努利、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯、高斯、圣维南 (Saint-Venant) 以及带粘性流体和湍流方面的雷诺 (Osborne Reynolds) 和泰勒 (Geoffrey I. Taylor), 等等。

今天, 纳维 - 斯托克斯方程解的存在唯一性和许多特征 (例如光滑性) 尚待证明。1934 年, 法国数学家让 - 勒雷 (Jean Leray) 证明了方程在某种意义上弱解的存在。目前已知方程有一百多个特解, 但一般解只能借助于计算机求数值近似。1999 年, 美国数学家斯梅尔在题为“下一个世纪的数学问题”(Mathematical problems for the next century) 的文章中也把纳维 - 斯托克斯方程列为现代数学尚待解决的 18 个极大难题之一。

【二】

纳维是法国工程师与物理学家, 他的主要贡献在力学领域。

纳维的父亲克劳德 - 伯纳德 (Claude-Bernard Navier) 是个律师, 在法国大革命时期是巴黎国民议会一位议员。父亲在 1793 年去世后, 母亲珍妮 - 玛



图 1. 纳维 (1785 年 2 月 10 日 - 1836 年 8 月 21 日)

丽自己回归老家沙隆，把纳维留在巴黎由叔公、数学家和土木工程师高西 (Émiland Gauthey) 负责教育培养。当年，高西在桥梁公路学校兼职任教，并于 1791 年被政府任命为桥梁与公路建筑集团的总督导。叔公是少年纳维心目中的模范榜样，让他立志将来当一个土木工程师。

1802 年，17 岁的纳维进入巴黎综合理工学院就读。纳维的入学成绩几乎排在最低端，但他后来十分努力，一年后就进入了前十名优等生行列。在理工学院，纳维修读了数学家傅立叶主讲的数学分析课程。纳维学习用功、思维敏捷，深得傅立叶教授的喜悦。后来，两人成为终生挚友。1804 年，纳维以优等生资格从理工学院毕业。1806 年，叔公高西去世，建筑集团邀请纳维去整理他留下的丰富文献记录和研究资料。在接下来的十多年里，纳维编辑了他叔公的手稿，主要是一些传统经验方法在土木工程中的多种应用，其中也加上了自己理论力学研究的一些分析结果。1813 年，纳维为叔公出了新版的《桥梁特性》(*Traité des ponts*) 以及为法国著名水力学工程师贝利多尔 (Bernard-Forest de Bélidor) 出了

新版的《工程手册》。

1819 年，纳维应聘在桥梁公路学校讲授应用力学课程。在那里，纳维对传统的力学课程教学大纲做了一次彻底的改革，增加了大量的物理学和数学分析内容。

1820 年代初期，纳维与在巴黎综合理工学院任教的数学家柯西和拉梅 (Gabriel Lamé) 一起建立了力学中的弹性基本理论。1821 年，纳维推导出一条新的弹性理论数学公式，第一次获得了具有足够精确度的弹性力计算结果。

1823 年，纳维受政府委托前往英格兰和苏格兰，去了解链式悬索桥的建设情况。事后他发表了一份著名的调查报告，其中提出了桥梁史上第一个悬索桥理论。这一成绩让他在 1824 年获选为法国科学院院士。不过，纳维的科学研究和工程实践也并非一帆风顺。1824 年，纳维在主持荣军院吊桥 (Pont des Invalides) 设计时，在计算中没有留出足够的安全余量，导致桥梁开裂并最终被拆除。当时指控不断，他因而受到了政府委员会的公开问责，认为他的设计过分依赖于物理数学而不是工程经验。

1826 年，纳维出版了《桥梁与道路学院课程总结》(*Résumé des Leçons Données à l'École des Ponts et Chaussées*)，文中论证了弹性模量是材料的一个基本属性，只和物体的材质有关而与其结构几何形状无关。这项重要成果让他成为结构分析理论的奠基人之一。

1828 年，纳维和泊松在《化学与物理年鉴》(*Annales de Chimie et de Physique*) 杂志上发生了关于弹性理论的争论。不过，因为两者都基于相同的分子假说，这场辩论无果而终。

1830 年 7 月，法国爆发了“七月革命”。国王查理十世逃离法国，由波旁王