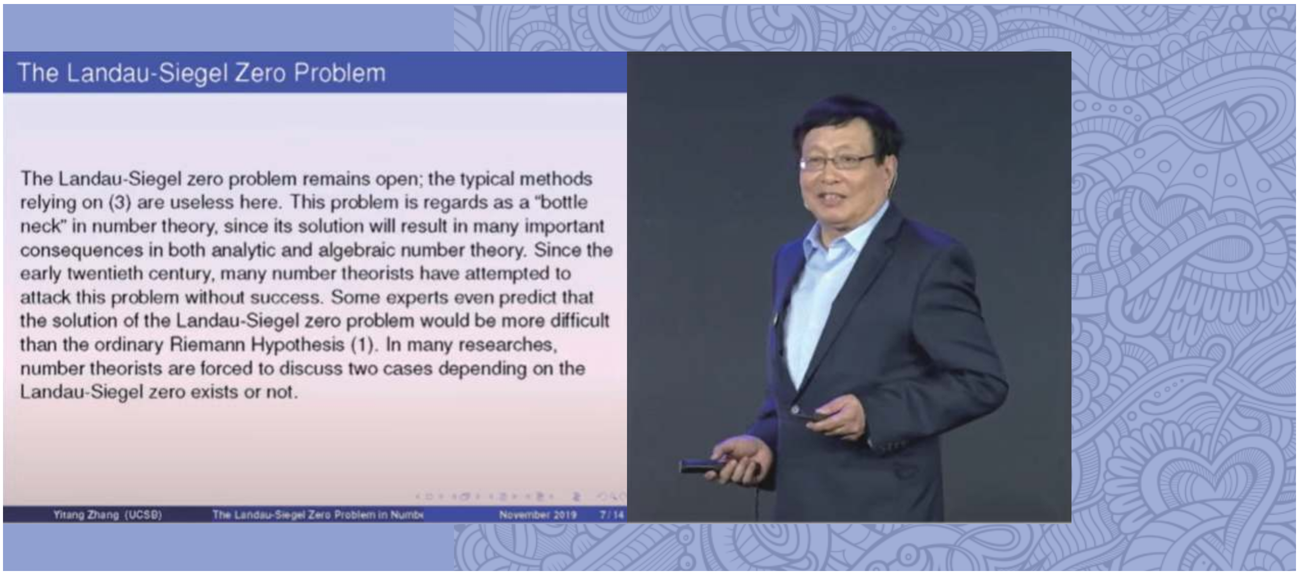

什么是朗道 – 西格尔零点问题?

卢昌海

1. 引言

对中文圈的数学爱好者来说，很大程度上得益于美国加州大学圣巴巴拉分校的张益唐教授的不懈研究，使**朗道 - 西格尔零点问题**（也称为**朗道 - 西格尔零点猜想**）成为了近年来一个“出镜率”较高的数学问题。很多数学爱好者也许听说过，这一问题跟著名的黎曼猜想有一定渊源。不过，出现在这一问题中的“朗道 - 西格尔零点”究竟是什么，这一问题跟黎曼猜想具体有什么渊源，恐怕是普通数学爱好者知之不详的。本文打算对这些问题做一个简单介绍，以期为读者了解朗道 - 西格尔零点问题，乃至啃读相关研究提供一座小小桥梁。

本文的介绍将试图在概念层面上做到“自给自足”——当然，这种所谓“自给自足”并非没有门槛，而只是将数论领域内的概念门槛降低一点。同时，本文也将追求“理论最低要求”（Theoretical Minimum）[1]——即尽量不介绍多余的东西。据说俄国作家契科夫（Anton Chekhov）曾经表示，如果小说的第一

[1] 渊博的读者一定看出来了，这名称是拾了苏联物理学家列夫•朗道（Lev Landau）的“牙慧”。

章有一杆枪挂在墙上，那么在后面章节里，这杆枪必须开火。本文所谓的“理论最低要求”也有类似之意，即如果前面介绍过一个概念，那么在后面就尽量要用到这个概念——或者反过来说，一个概念除非后面要用到，否则尽量不在前面做介绍[2]。

现在让我们言归正传，从引进一些基本概念入手。

2. 黎曼 ζ 函数与狄利克雷 L 函数

我们首先要引进的是**黎曼 ζ 函数** $\zeta(s)$。这一函数在解析数论中有着极重要的作用，可作为很多论题的切入点，它定义为以下级数在复平面上的解析延拓：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad(\mathrm{Re}(s)>1)$$

解析延拓后的黎曼 ζ 函数可以用一个围道积分来表示，但后文不会用到那样的表示式，作为“理论最低要求”，就不做介绍了[3]。

其次要引进的是所谓**狄利克雷 L 函数** $L(s,\chi)$，它定义为以下级数在复平面上的解析延拓：

$$L(x,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\qquad(\mathrm{Re}(s)>1)$$

跟先前引进的黎曼 ζ 函数相比，狄利克雷 L 函数的求和式里多了一个 χ。这个 χ 是定义在整数集上的函数，被称为**狄利克雷特征**（Dirichlet character），它由以下三个条件共同定义（其中 D 为正整数，m、n 为整数）：

A1. 对一切 n，$\chi(n)=\chi(n+D)$，

A2. 对一切 m 和 n，$\chi(m)\chi(n)=\chi(mn)$，

A3. 对一切 n，若 D 和 n 互素，则 $\chi(n)\neq 0$，否则 $\chi(n)=0$。

细心的读者也许注意到了，狄利克雷特征的定义中包含了一个自由参数 D ——被称为狄利克雷特征的**模**（modulus）[4]。由于这个缘故，狄利克雷特征也被称为**模 D 的狄利克雷特征**（Dirichlet character of modulus D），或标记

[2] 当然，只能做到“尽量”——因为科学写作毕竟不同于小说创作，对领域内常用的、等价的或相关的概念，哪怕不直接用到，有时也必须提及，以扩大文章的适用面，同时也便利读者。

[3] 对那样的表示式感兴趣的读者可参阅拙作《黎曼猜想漫谈：一场攀登数学高峰的天才盛宴》（清华大学出版社，2016 年）的第 2 章。

[4] 标记这个自由参数的字母很多，除 D 外，k、m、q 也很常见。考虑到本文的读者可能有很大比例是受张益唐教授的影响而关注朗道 - 西格尔零点问题，或试图啃读张益唐教授的论文，故本文特意采用了与张益唐教授的论文相一致的字母——即 D。

为 χ_D，以显示它跟 D 有关。不仅如此，狄利克雷 L 函数本身有时也会被标记为 $L(s, \chi_D)$ 或 $L_D\ (s, \chi)$，以显示其——经由 χ_D ——跟 D 有关。不过为简单起见，在无需直接涉及 D 的时候，很多文献会在标记中略去 D，本文也效仿之（需要的时候则随时恢复，不另作说明）。

关于狄利克雷特征，还有一个一目了然的特点，那就是：如果 $D = 1$，则 $\chi(n) \equiv 1$，$L(s,\chi) = \zeta(s)$。因此，黎曼 ζ 函数是狄利克雷 L 函数的特例，狄利克雷 L 函数则是黎曼 ζ 函数的推广。

3. 黎曼猜想与广义黎曼猜想

介绍了黎曼 ζ 函数及可视为其推广的狄利克雷 L 函数，读者也许猜到了，接下来要介绍的是与之对应的黎曼猜想及广义黎曼猜想。之所以要介绍这两个猜想，是因为本文的主题——朗道 - 西格尔零点问题——确如我们在引言里提到的，“跟著名的黎曼猜想有一定渊源”，而这渊源可以作为引出朗道 - 西格尔零点问题的便利途径。

黎曼猜想及广义黎曼猜想的表述是这样的：

黎曼猜想：

黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线上。

广义黎曼猜想：

狄利克雷 L 函数 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线上。

这里所谓的**“非平凡零点”**（non-trivial zeros）需略作说明。黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 和狄利克雷 L 函数 $L(s, \chi)$ 都有无数个函数取值为 0 的点，称为零点。在这些零点中，一部分是有规律地分布在负实轴上的，比如（n 为正整数）[5]：

对 $\zeta(s)$： $s = -2n$
对 $L(s, \chi)$ 且 $\chi(-1) = 1$： $s = -2n$
对 $L(s, \chi)$ 且 $\chi(-1) = -1$： $s = -2n + 1$

[5] 值得指出的是，这里所列的狄利克雷 L 函数的两种情形涵盖了一切可能性。因为从狄利克雷特征的定义之 A2 和 A3 可以很容易地证明 $\chi(-1)$ 只能有 $\chi(-1) = 1$ 和 $\chi(-1) = -1$ 这两种取值——相应的狄利克雷特征分别被称为**偶特征**（even character）和**奇特征**（odd character）。

这些零点被称为**平凡零点**（trivial zeros）。除此之外，某些狄利克雷 L 函数 $L(s, \chi)$ 在虚轴上也存在有规律地分布着的零点，那些零点也被称为平凡零点[6]。

而所谓非平凡零点，则是指全部零点中除去平凡零点后的剩余部分。

关于黎曼 ζ 函数和狄利克雷 L 函数的非平凡零点，有几个相对容易且早已证明的结果可罗列如下：

B1. 非平凡零点有无穷多个；

B2. 非平凡零点全都位于 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 的带状区域内；

B3. 非平凡零点相对于 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线对称分布。

由于狄利克雷 L 函数是黎曼 ζ 函数的推广，因此广义黎曼猜想如果成立，黎曼猜想将自动成立（故而“广义”一词名副其实）。

另外可以补充的是：在黎曼猜想的研究中，数学家们将复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线称为**临界线**（critical line），将 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 的带状区域称为**临界带**（critical strip）。运用这两个术语，关于黎曼 ζ 函数和狄利克雷 L 函数非平凡零点的前述结果也可表述为：非平凡零点有无穷多个，全都位于临界带内，且相对于临界线对称分布。黎曼猜想及广义黎曼猜想则可表述为：黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 及狄利克雷 L 函数 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点都位于临界线上。

4. 主特征与二次特征

接下来就该介绍朗道 - 西格尔零点了，不过在介绍之前，有几个关于狄利克雷特征的术语需先行交代一下——因为会在定义朗道 - 西格尔零点时用到。

首先要交代的是**主特征**（principal character）。在所有狄利克雷特征之中，最简单的一类是所有取值都是 0 或 1 的，这类狄利克雷特征就是所谓主特征[7]。主特征通常被记为 χ_0 ——这个记号很遗憾地跟 χ_D 这一标记方式相冲突，因为这里的下标 0 并不表示 $D = 0$（主特征的 D 依然可自由取值，并且只是正整数），只能视为特殊记号。

其次要交代的是**二次特征**（quadratic character）。这是除主特征外最简单

[6] 那些零点出现在 χ 是所谓**非本原特征**（imprimitive character）的情形下，可参阅 H. L. Montgomery & R. C. Vaughan，*Multiplicative Number Theory* (*I. Classical Theory*)，Cambridge University Press，2006，Chapter 10；或 Keith Conrad，“*L*-Functions and the Riemann Hypothesis”，page 18。

[7] 由狄利克雷特征的定义之 A3 可直接推知，在主特征中，取值为 0 的是 D 和 n 互素时的 $\chi(n)$，取值为 1 的则是所有其他 $\chi(n)$。特别留意字眼的读者也许会说，前文提到过的 $\chi(n) \equiv 1$ 才是最简单的狄利克雷特征。这没错，不过这只是主特征之中 $D = 1$ 的特例，是“一个”而非“一类”，故不妨碍将主特征称为“最简单的一类”。

的狄利克雷特征，其所有取值都是 0、1 或 −1，且至少包含一个 −1（否则就退化为主特征了）。这种狄利克雷特征为什么会被称为二次特征呢？那是因为它的二次幂等于主特征，即 $\chi^2 = \chi_0$（因为二次特征的取值 0、1 或 −1 在二次幂下会变成 0 或 1，从而满足主特征的定义）[8]。

可以证明，主特征和二次特征是仅有的两种全部取值皆为实数的狄利克雷特征（其他所有狄利克雷特征都有某些取值为复数[9]）。有鉴于此，这两者常被统称为**实特征**（real character）——即**“实特征 = 主特征 + 二次特征”**。而二次特征则有时也被称为**非主实特征**（nonprincipal real character）——即**“二次特征 = 实特征 — 主特征”**。

交代完了这些术语，就可以介绍朗道 - 西格尔零点了，这一介绍将从前面介绍过的黎曼猜想与广义黎曼猜想入手。

5. 朗道 - 西格尔零点

黎曼猜想与广义黎曼猜想都是迄今尚未被证明的数学猜想——且称得上是此类数学猜想中最重要的，因为在数学文献中已有一千多个命题是以它们的成立为前提的。换句话说，这两个猜想一旦被证明，数学中将会有一千多个命题“鸡犬升天”，荣登定理宝座，这绝对会是数学领域中影响深远的重大事件[10]。

由于这一缘故，数学家们在试图证明黎曼猜想与广义黎曼猜想方面付出了艰辛努力。

这种努力可粗略分为两个方向：一是试图证明尽可能多的非平凡零点位于临界线上——若能将“尽可能多”变成全部，则等于完成了证明；二是试图证明临界线以外尽可能多的区域没有非平凡零点——若能将“尽可能多”变成全部，也等于完成了证明。

可惜直到今天，在这两个方向上的成果距离证明黎曼猜想与广义黎曼猜想都还有很遥远的距离。

比如在第一个方向上，哪怕对于相对简单的黎曼 ζ 函数，迄今已被证明为位于临界线上的非平凡零点的数目也还不到总数的一半；而在第二个方向上，则迄今尚不能将临界带的宽度压缩掉无论多么小的有限幅度——即尚不能将非平凡零点的分布区域由 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 压缩到 $\epsilon \le \mathrm{Re}(s) \le 1-\epsilon$，无论 ϵ 是多

[8] 一个狄利克雷特征 χ 的幂次 χ^r（r 为正整数）定义为：对一切 n，$\chi^r(n) = [\chi(n)]^r$。可以证明，这样定义的 χ^r 依然是狄利克雷特征，且对所有 χ 都存在 r 使得 $\chi^r = \chi_0$——其中最小的 r 称为 χ 的**阶**（order）。很明显，主特征的阶是 1，二次特征的阶是 2。

[9] 当然，这里的复数是特指虚部不为零的复数，而非“实数也是复数”意义上的平凡的复数。

[10] 当然，尽管我们在这里侧重于谈论黎曼猜想与广义黎曼猜想的“被证明”，但实际上，一切尚未被证明的数学猜想都有一定的可能性被否证，黎曼猜想与广义黎曼猜想也不例外。它们如果被否证，虽不等于那一千多个命题全军尽墨，却同样会成为数学领域中影响深远的重大事件。