

中国解析数论学派

萨那克¹

仵眉
整理



彼得·萨那克 (P. C. Sarnak)，普林斯顿高等研究院数学讲座教授、普林斯顿大学数学讲座教授、美国科学院院士、英国皇家学会会员；1997年在国际数学物理大会作一小时报告，1998年在国际数学家大会作一小时报告；2014年获得山东大学荣誉博士学位，并获得沃尔夫数学奖。2024年，萨那克获邵逸夫数学科学奖，以表彰他“将数论、分析学、组合学、动力学、几何学和谱理论结合起来，发展出薄群的算术理论和仿射筛法”¹。

当地时间2024年6月2日晚，中央电视台采访小组在普林斯顿高等研究院采访了彼得·萨那克教授，恰逢庆祝萨那克诞辰70周年的国际会议在普林斯顿举行。本文根据采访录像整理而成，作为一家之言刊出。为便于阅读，文中添加了几个小标题。

问：

非常感谢您百忙之中抽空与我们见面。您能评价一下老一辈中国解析数论学派的工作吗？

萨那克：

毫无疑问，中国数学有辉煌的发展历史，中国数学家尤其在解析数论领域影响巨大。解析数论主要是使用分析工具和组合学等来研究整数问题。当然，数学

¹ 摘自邵逸夫奖官网颁奖词。——整理者注



萨那克在邵逸夫奖颁奖典礼上致辞，2024年11月12日，香港（刘建亚摄）

家在研究问题的过程中会结合各种可用的工具，这也是数学得以发展的强大动力。

解析数论在20世纪和21世纪的中国有着优良的发展传统。我不太了解它在中国的起源；但可以肯定的是，华罗庚、潘承洞、潘承彪、陈景润、张益唐和刘建亚这些数学家对这门学科的发展产生了巨大的影响。

中国解析数论的早期发展与成就

先说说华罗庚。哈代（G. H. Hardy）和李特尔伍德（J. E. Littlewood）共同建立了现代解析数论的研究机制，而华罗庚则深受这两位数学家的影响。他曾在英国和美国都待过一段时间，兴趣相当广泛，在多复变、随机矩阵理论、对称空间等问题上均有研究。当年我跟着保罗·科恩（P. J. Cohen）学习数论时，他给我们讲了华罗庚在解析数论领域的成就。华罗庚提出了很多极其重要的问题，开辟了许多新的研究路径；他对于不等式²的研究至关重要。

我认为潘承洞和潘承彪都深受华罗庚的影响。今年是潘承洞诞辰90周年，他曾是山东大学的校长。潘承洞师从于闵嗣鹤，而闵嗣鹤在牛津大学读书时师从蒂奇马什（E. C. Titchmarsh）学习傅里叶分析和数论——特别是黎曼 ζ 函数——这是当时解析数论研究的核心。蒂奇马什的学生非常少，我读本科时的老师希尔斯（D. B. Sears）也是蒂奇马什的少数几个学生之一，他教我们素数定理。如此说来，我和闵嗣鹤也算有些渊源。蒂奇马什写的有关黎曼 ζ 函数的著作，深深影响了闵嗣鹤。如果你去读这本书，能看到蒂奇马什在书中致谢希尔斯关于微分方程的重要见解；微分方程也是蒂奇马什的另一个重要研究方向。

闵嗣鹤受到了传统英国学派的影响。中国解析数论学派随之逐渐发展，先

² 此处不等式是指堆垒数论中著名的华氏不等式。——整理者注



1998年夏，塞尔伯格、萨那克首次访问中国。塞尔伯格取道香港，在香港大学访问之后，由刘建亚等陪同到达北京。萨那克直接从美国飞来北京。在北京大学访问之后，塞尔伯格、萨那克、刘建亚等到达山东大学，在数论暑期学校演讲。这张照片是塞尔伯格、刘建亚、萨那克1998年6月在北京的合影。（叶扬波摄）

是华罗庚、闵嗣鹤，接下来便是潘氏兄弟和陈景润。20世纪初，哈代、李特尔伍德和拉马努金（S. A. Ramanujan）共同发明了圆法，这种方法可以帮助解决方程的整数解或素数解问题。接下来，华罗庚、潘氏兄弟和陈景润开始研究这些问题，著名的苏联数学家维诺格拉多夫（I. M. Vinogradov）在先前的基础上取得巨大进展，证明了某些猜想。素数是每个学习整数的人都了解的概念，数学家们也总在追逐像孪生素数猜想、哥德巴赫猜想这类有关素数的问题。我们会很自然地发问：存在无限多对孪生素数吗？迄今答案依然未知。

当我们尝试解决一个问题时，即使不能完全破解，也会尽最大努力逼近答案。中国早期的解析数论学家正是在这个过程中一鸣惊人。首先，潘承洞能够推进哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的解决，即证明了猜想其中的一个素数换成至多有5个素因子的殆素数时成立。这在当时是一个巨大的成就。这足以说明，他迅速掌握了研究工具，克服了技术上的巨大困难，并做出了根本性的创新。到了70年代，陈景润的故事广为人知，激励了一代中国数学家。他逼近最终破解哥德巴赫猜想，震惊世界；即使在新发展不断涌现的今天，他的结果仍然是我们已知的最好结果。虽然他没能证明存在无限多对间隔为2的素数，但他证明了每个充分大的偶数都可表为一个素数和一个素因子个数不超过2的整数之和。陈景润使中国人一跃站在20世纪世界解析数论的中心。陈景润来自华罗庚学派，同样的学派和导师培养了包括他和潘氏兄弟在内的一批年轻数学家，在素数理论中取得了里程碑式的结果，并推进了许多相关领域的研究。

华罗庚提出了许多不同类型的问题，并在孪生素数猜想以及很多其他猜想的研究中引入使用多个变量的方法。随着研究的推进，数学家们碰到了一些难



1998年，山东大学数论暑期学校

前排左起：曾启文，王伟，萨那克，塞尔伯格，展涛，叶扬波，潘承彪；
二排：曹晓东（左一），翟文广（左二），陆鸣皋（左四），刘建亚（右二），陈永高（右一）

以逾越的壁垒，而打破这些壁垒便成为主要目标之一。在这个过程中，中国解析数论学者与世界各地优秀的学者互相竞争，共同推进了这个研究领域的发展。

萨那克与中国

以上基本是中国解析数论比较早期的发展。潘氏兄弟，尤其是潘承洞，在各种问题上起到了决定性的作用。这是我在中国第一次和潘承彪见面时他送我的（拿出一本书），是他们兄弟俩合著的书，扉页上写着“to Professor Sarnak”，有潘承彪的签名，日期是1998年。这是一本非常好的书，我经常参考它，讲课也用到过。书里讲述了80年代和90年代数论的最新发展，我认为写得比达文波特（H. Davenport）那本书更有意思。



萨那克展示潘承彪的赠书（何明圣摄）