

帕累托和帕累托最优前沿面

蒋 迅

1 引言

维尔弗雷多·帕累托 (Vilfredo Federico Damaso Pareto) 是意大利经济学家、社会学家、哲学家、政治科学家^{1,2}。他对经济学、社会学和伦理学做出了很多重要的贡献,特别是在收入分配的研究和个人选择的分析中。最著名的就是“20/80 法则”(Pareto 20/80 principle)。他还推广了“精英”一词在社会分析中的使用。尽管他在世时影响不大,但他对一般均衡理论的“品味与障碍”(tastes-and-obstacles)方法在 20 世纪 30 年代推动了经济学界的“帕累托复兴”(Paretian Revival)。他同时也是一位应用数学家。我们将在这篇文章里介绍他的生平和他在数学优化方面的贡献。

2 帕累托简介



图 1. 帕累托³ (1848–1923, 拍摄于 1870 年代)

¹ Vilfredo Pareto, <https://www.econlib.org/library/Enc/bios/Pareto.html>.

² M. Ehrgott, Vilfredo Pareto and Multi-objective Optimization, Documenta Math., Vol. Extra Volume: Optimization Stories (2012), 447-453.

³ Wikipedia, Vilfredo Pareto, https://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto (<https://zh.wikipedia.org/wiki/维尔弗雷多·帕累托>).

帕累托（图1）于1848年出生于巴黎的一个流亡贵族热那亚家庭，巴黎是当年民众革命的中心。他的父亲拉斐尔·帕累托（Raffaele Pareto）是意大利土木工程师和利古里亚侯爵。1835年，老帕累托效仿意大利作家、政治家，意大利统一运动的重要人物马志尼（Giuseppe Mazzini），与其他意大利民族主义者一样自我流放出意大利。他的母亲梅特尼尔（Marie Metenier）是一位法国妇女。本文的主角维尔弗雷多·帕累托是他们的第三个孩子。他的父母由于热衷于德意志1848年革命，给他取了个德国名字威尔弗里德·弗里茨·帕累托，1858年他们全家搬回意大利后更名为维尔弗雷多·费德里·帕累托。童年时期，帕累托生活在中产阶级环境中，接受了高水平的教育，就读于新成立的莱尔迪技术学院（Istituto Tecnico Leardi）。意大利数学家罗西里尼（Ferdinando Pio Rosellini）是他的数学教授。1867年，帕累托大学毕业后进入都灵综合理工学院，正是在这里，他掌握了数学知识和关于机械平衡的基本思想，这些思想构成了他后来对经济学的贡献。1869年，他获得工程学博士，其博士论文为《刚体均衡之一般定理》（*The Fundamental Principles of Equilibrium in Solid Bodies*），为之后的发展定下根基。他后来对经济学和社会学均衡分析的兴趣可以追溯到这篇论文。

毕业后的几年里，他担任土木工程师，他的第一份工作是在国有的意大利铁路公司任经理。1874年，帕累托成为佛罗伦萨一家钢铁公司的总经理。在佛罗伦萨期间，帕累托对政治活动的参与更为引人注目。这主要源于1876年意大利的自由主义政府被更具干预主义的政府取代后，帕累托很快就发现了经济监管、保护主义和国有化背后的政治交易，并引发了他对政府监管机构的不满。直到四十多岁，他才开始认真从事经济学研究。1886年任佛罗伦萨大学经济管理学讲师。

1889年，父母去世后，帕累托改变了生活方式。他继承了侯爵头衔，但从未使用过。相反，他辞去了工作，与来自威尼斯的身无分文的俄罗斯女孩巴枯宁（Alessandrina Bakunin）结婚，并搬到了菲耶索莱（Fiesole）的一栋别墅。隐居后，他开始撰写大量反对政府的辩论文章，并在工人学院进行公开演讲。他很快就被当局列为麻烦制造者。由于受到警察的跟踪，受到雇佣暴徒的恐吓，他的讲座经常被关闭，他对教师工作的申请也被阻止。

帕累托干脆远走瑞士洛桑大学出任政治经济学的教席。从此他继续发展他的经济学理论，出版了三卷本的讲稿《政治经济课程》（*Cours d'économie politique*, 1896、1897），并继续对意大利政府进行攻击。在《课程》中，他的主要经济贡献是对收入分配“帕累托定律”的阐述。帕累托也对“效用”（utility）这个概念感到困扰。在通常的用法中，效用意味着个人或社会的福祉，但帕累托意识到，当人们做出经济决策时，他们会以他们认为对自己有利的方式为指导，无论这是否符合他们的福祉。因此，他引入了“*ophelimity*”一词来取代陈旧的“*utility*”（意思是期望）。这是帕累托从希腊语 $\omega\phi\epsilon\lambda\iota\mu\omicron\varsigma$ （beneficial）引入的，意思就是能够满足合法或非法的需要或欲望的事物的属性。

关于帕累托的经济学理论还有很多有意思的故事。这其中包括他和墨索里尼的关系，他对法西斯和对马克思的态度等。但这些不是我们本文的

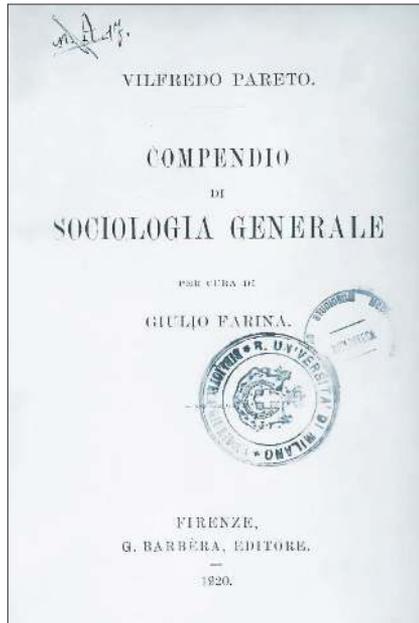


图 2.《普通社会学概要》封面⁴

重点。帕累托的晚年致力于为他最著名的著作《心灵与社会》(*Trattato di Sociologia Generale*, 1916, 英译本 *The Mind and Society* 于 1935 年出版) 收集材料。在这本书中, 帕累托提出了第一个社会学循环理论, 以精英社会阶层的概念为中心。他的最后一部作品是《普通社会学概要》(*Compendio di sociology Generale*, 1920, 图 2)。

在结束本节之前, 我们最后再介绍一个有意思的“帕累托法则”(图 3)⁵。

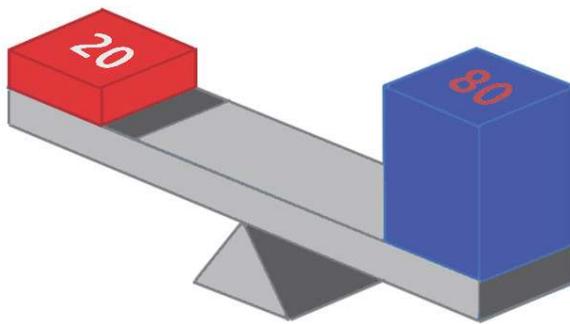


图 3. 帕累托法则

⁴ Wikipedia, Vilfredo Pareto, https://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto (<https://zh.wikipedia.org/wiki/维尔弗雷多·帕累托>).

⁵ Wikipedia, Pareto Principle, https://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_principle (<https://zh.wikipedia.org/wiki/帕累托法则>).

帕累托因对意大利 20% 的人口拥有 80% 的财产的观察而著名，后来被别人概括为帕累托法则（20/80 法则，或二八法则），后来进一步概括为帕累托分布（Pareto distribution）的概念。这个法则可以归纳为：所有变因中，最重要的仅有 20%，虽然剩余的 80% 占了多数，影响的幅度却远低于“关键的少数”。帕累托的结论是出自于自己的观察：意大利约有 80% 的土地由 20% 的人口所有、80% 的豌豆产量来自 20% 的植株等等。英国风投家科赫（Richard Koch）撰写了一本“80/20”原则，展示了帕累托原则在企业管理和生活中的实际应用。不要小看这个法则。帕累托法则是一个普遍存在的法则。比如说，80% 的土地掌握在 20% 的人手里；一个公司的营业额有 80% 来自 20% 的核心客户；微软曾经说过，他们只要解决了 20% 的程序错误就能解决系统中 80% 的问题；蚂蚁中有 80% 的永远在劳动，而 20% 的永远在休息。这个法则是一个自然法则。即使在小的基数条件下也成立。有一个真实的故事说有一个女人和 32 个日本男人落难到了一个荒岛上。他们会如何占有这个女人呢？结果是遵从帕累托二八法则⁶。回到财富分布上，我们知道人的智商符合正态分布，而财富的分布满足的则是向两极发展：很多人获得了很少的财富，很少的人获得了很多的财富。这其实不是一个偶然现象。有人做出过一个数据模型，发现财富的分布完美地符合帕累托法则。帕累托法则是帕累托最主要的贡献，这方面已经有了很多文章。而我们今天要介绍的是帕累托的另一个贡献：多目标优化中的帕累托最优前沿曲面（两个目标的情况下就是帕累托前沿曲线）。

3 帕累托最优前沿面

“帕累托最优”来自于他的经济学理论⁷。假设确实存在这样一组价格，那么由此产生的均衡分配是“有效”的吗？帕累托认为，我们需要知道的是一个人喜欢 A 的程度 X 和喜欢 B 的程度 Y 。效用是一种优先顺序。由此，帕累托不仅开创了现代微观经济学，而且还摧毁了经济学与功利主义哲学的联盟（功利主义哲学要求最大多数人获得最大的利益；帕累托说“优”是无法衡量的）。他用帕累托最优的概念取而代之。这里“效率”指的就是“帕累托最优”的概念：即，如果通过重新分配，在不会使其他人的境况变得更糟的条件下不能使某人的境况变得更好，那么这种情况就是帕累托最优。用帕累托的话来说：“当一个集体的成员在某个位置上享有最大的亲和力时，不可能找到一种方法来稍微离开该位置，从而使该集体中每个人所享有的亲和力增加。也就是说，偏离这一立场的任何微小的位移必然会产生增加某些人所享有的不利性的效果，并减少其他人所享有的不利性，即对某些人有利，而对另一些人不利。”如果能让某人的境况变得更好而不会让其他人的境况变得更糟，那么这种情况就不是帕累托最优的。

⁶ 32 个男人和 1 个女人，流落荒岛 7 年，占有权居然遵从二八分配定律，https://www.sohu.com/a/803522435_120493279

⁷ Wikipedia, Pareto front, https://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_front.

如果读者感觉这样的描述过于笼统,让我们先来看一个双四次多项式函数例子⁸:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^4 + y^4 + xy - x^2y^2 + 3y^3 \\ f_2(x, y) &= x^4 + y^4 + xy - x^2y^2 - 9x^2 \end{aligned}$$

我们希望得到这样的点,它使得两个函数(在一个区域,比如 $[-5, 5] \times [-5, 5]$ 中)都达到最小。用优化的语言就是求点 (x, y) , 达到

$$\min\{f_1(x, y), f_2(x, y) \mid -5 < x < 5; -5 < y < 5\}.$$

下面的图4显示的是这两个函数值缩小了10倍后在区域 $[-5, 5] \times [-5, 5]$ 上的图像。容易看出,这两个函数在不同的点达到极小。因此我们上面求极小的定义是不确定的。这就涉及到了多元函数求极值的问题。

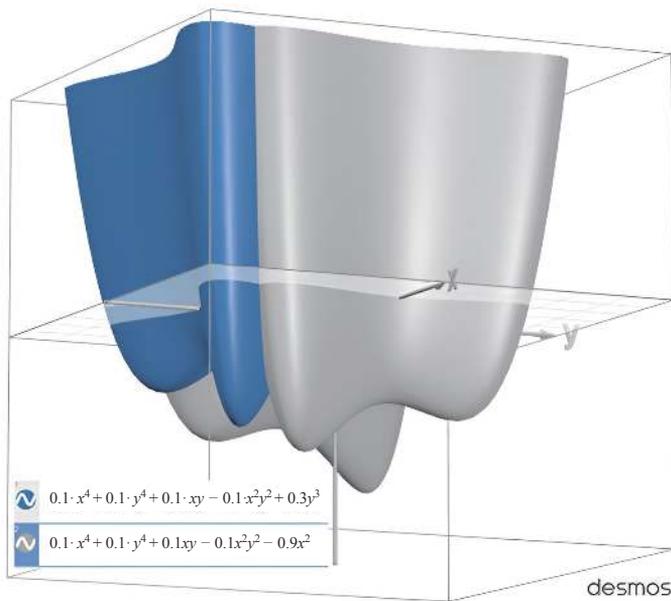


图4. 一个双四次多项式函数例子

多目标优化问题是涉及多个目标函数的优化问题。用数学术语来说,多目标优化问题可以表达为

$$\min_{x \in X} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)).$$

这里整数 $k \geq 2$ 是目标的数量。集合 X 是可行的决策向量集。通常 $X \subseteq R^n$ 。可行域通常由某些约束条件定义。如果要最大化其中某些目标函数,则等价于求

⁸ Pareto Front for Multiobjective Optimization, Problem-Based, <https://www.mathworks.com/help/gads/multiobjective-optimization-prob-based.html>.