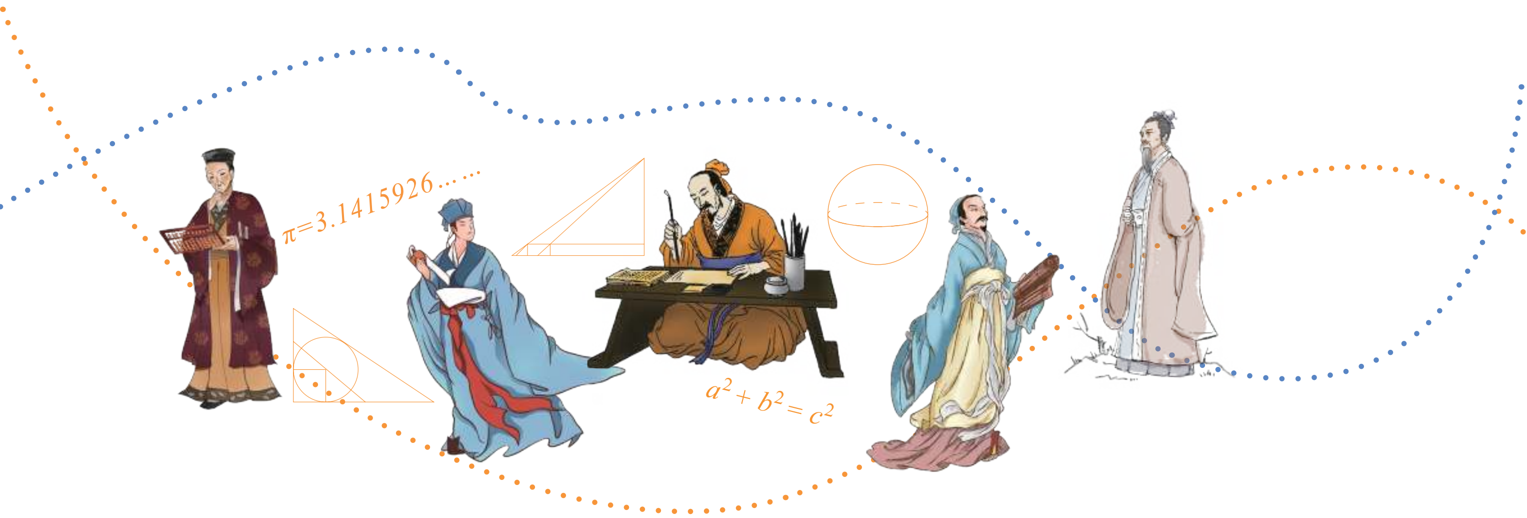


欲说还休：刘徽数学论证中的留白

汪晓勤

1 引言

数学的历史告诉我们，没有前人的留白，就不会有后人的创新[1]。留白的形式有六类，即陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白[2]。数学概念的不断演进，是数学家补“陈述之白”所导致的创新；数学规律的发现和论证，是数学家补“发现之白”和“论证之白”所催生的创新；数学问题的提出和解决是数学家补“问题之白”和“方法之白”所引发的创新；数学精神的形成、思想和方法的凝练，是数学家补“超越之白”所促成的创新。

在中算史上，三国时代数学家刘徽为《九章算术》作注，正是一种“补白”的创新工作。《九章算术》给出各种问题的解法，其中涉及许多数学概念、公式、命题和法则，但对概念的内涵以及公式、命题和法则的来源却不着一字，也很少关注不同问题之间的联系。刘徽在注中对有关概念加以界定，对正确的公式加以证明，对错误的公式加以辨析和纠正，对法则背后的算理加以探讨，对不同问题加以联系，补了原书留下的陈述之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白。

刘徽在序言中指出：“又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。”[3] 刘徽追求注解的简约而周密、通达而不繁琐，其目标是

[1] 汪晓勤 . 数学史上的留白与创新 . 中学数学月刊 , 2023(4), pp. 1-4.

[2] 王华 , 汪晓勤 . 中小学数学留白创造式教学：理论、实践与案例 . 上海 , 华东师范大学出版社 , 2023.

[3] 郭书春 . 汇校九章算术 . 沈阳 , 辽宁教育出版社 , 2004, p 1.

让读者能理解大半（而非全部）。可见，刘徽在补白的同时也有意为后人留白。

在提倡文化自信和拔尖创新人才培养的今天，基于中算史的留白创造式教学[4]开始进入人们的视野，考察中算家在数学论证过程中的留白，可以为今日教学提供思想启迪。鉴于此，本文选取刘徽关于“勾股容圆术”“圆田术”“弧田术”和“开立圆术”的部分注解，对其中的留白内容进行探讨。

2 勾股容圆

《九章算术》勾股章设题：“今有勾八步，股一十五步。问：勾中容圆径几何？”题后给出解法：“术曰：八步为勾，十五步为股，为之求弦。三位并之为法，以勾乘股，倍之为实。实如法得径一步。”[5]若直角三角形的勾、股分别为 a 和 b，则内切圆直径为

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}. \tag{1}$$

刘徽用两种不同方法对公式作了推导，其中第二种方法称：

“又画中弦以观其会，则勾、股之面中央小勾股弦：勾之小股、股之小勾皆小方之面，皆圆径之半。其数故可衰。以勾、股、弦为列衰，副并为法。以勾乘未并者，各自为实。实如法而一，得勾面之小股，可知也。以股乘列衰为实，则得股面之小勾可知。言虽异矣，及其所以成法之实，则同归矣。”[6]

如图 1，圆 O 为 Rt△ACB 的内切圆，过圆心 O 作斜边 AB 的平行线，分别交 AC 和 BC 于点 G 和 H，刘徽称线段 GH 为“中弦”，△ODH 和△GEO 的三边分别称为“小勾股弦”，

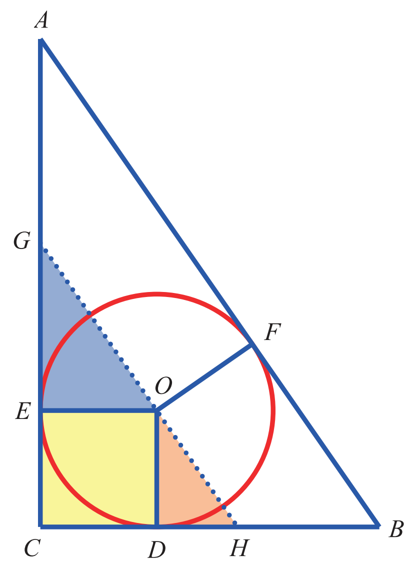


图 1. 勾股容圆公式之推导

[4] 汪晓勤，邹佳晨．基于中华优秀传统数学文化的高中数学留白创造式教学．中小学课堂教学研究，2023(9), pp. 1-6.

[5] 郭书春．汇校九章算术．沈阳，辽宁教育出版社，2004, p 417.

[6] 同上．

其中 OD 称为“勾之小股”或“勾面之小股”，OE 称为“股之小勾”或“股面之小勾”。其周长分别等于 Rt△ACB 的勾和股，即

$$OD + HD + OH = BC = a,$$
$$GE + OE + GO = AC = b\,.$$

由 Rt△ODH ∽ Rt△ACB 可得

$$\frac{HD}{a}=\frac{OD}{b}=\frac{OH}{c},$$

于是有

$$\frac{OD}{b}=\frac{HD+OD+OH}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c},$$

从而得“勾面之小股”

$$OD=\frac{ab}{a+b+c}.$$

类似地，由 Rt△GEO ∽ Rt△ACB 可得

$$\frac{OE}{a}=\frac{GE}{b}=\frac{GO}{c},$$

于是有

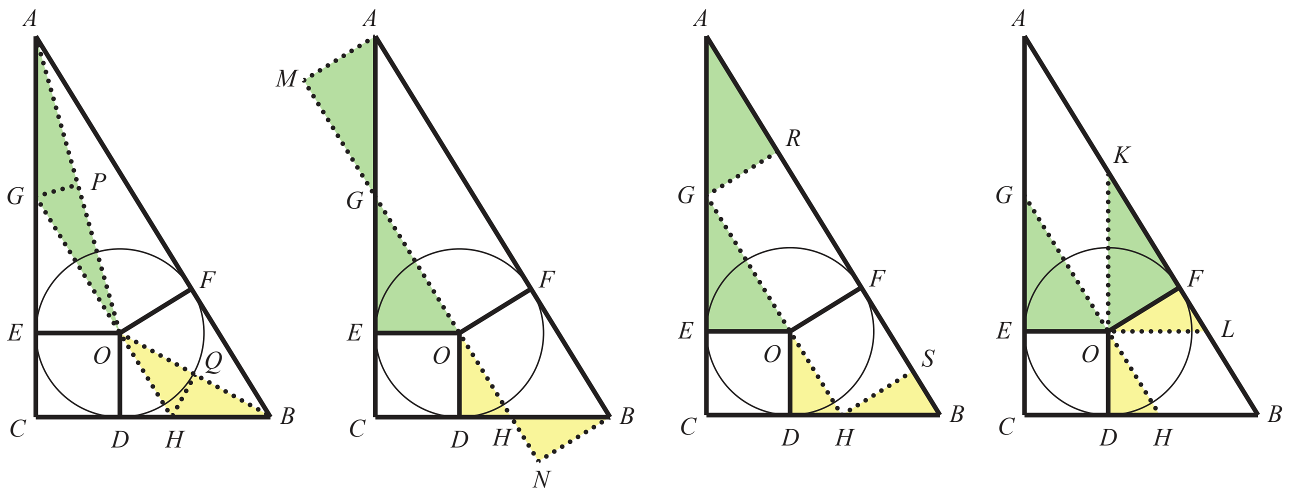
$$\frac{OE}{a}=\frac{OE+GE+GO}{a+b+c}=\frac{b}{a+b+c},$$

从而得“股面之小勾”

$$OE=\frac{ab}{a+b+c}.$$

在上述论证过程中，刘徽为后人留了白：为什么 $OD + HD + OH = BC$，$GE + OE + GO = AC$，亦即，为什么 $OH = HB$，$AG = GO$？他是如何知道该结果的？

今天，很容易利用角平分线、平行线、三角形外角、等腰三角形等知识，证明△AGO 和△BHO 都是“圭田”（等腰三角形）。虽然刘徽并没有一般角的概念，但我们完全可以推测：他已经知道图 2（1）-（4）中的两对直角三角形分别是全等的。



（1） （2） （3） （4）

图 2. 勾股容圆图中的两对全等勾股形

刘徽又给出另外几个勾股容圆公式：

“则又可以股弦差减勾、勾弦差减股为圆径；又弦减勾股并，余为圆径；并勾弦差、股弦差，减弦，余为圆径；以勾弦差乘股弦差而倍之，开方除之，亦为径也。”[7]

几个公式用今天的符号表达，分别是：

$$d = a - (c-b); \tag{2}$$

$$d = b - (c-a); \tag{3}$$

$$d = a + b - c; \tag{4}$$

$$d = c - [(c - a)+(c - b)]; \tag{5}$$

$$d = \sqrt{2(c-a)(c-b)}. \tag{6}$$

对于上述公式（2）-（5），刘徽既没有“析理以辞”，也没有“解体用图”，而是选择了留白。如图 3 所示，作圆 O 的外切正方形 $PQRS$，其中 PQ 位于斜边 AB 上，易知 $AQ = AC = b$，$BP = BC = a$，于是得 $AP = c - a$，$BQ = c - b$。由 $PQ = BP - BQ = AQ - AP$ 即得公式（2）和（3）；由 $AB = BP + AQ - PQ$，即得公式（4）；由 $PQ = AB - (AP + BQ)$ 即得公式（5）。

[7] 杨辉．详解九章算法．见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷（第一册），沈阳，辽宁教育出版社，1994, p 981.

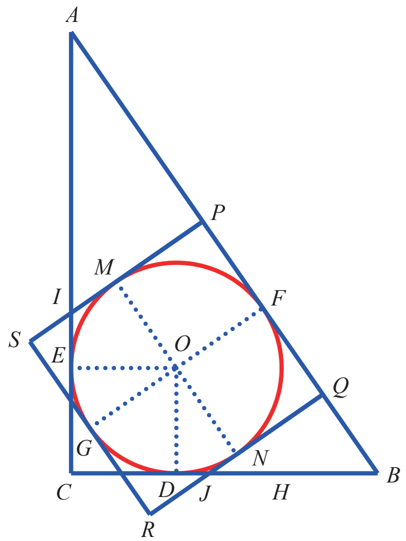


图 3. 关于勾股容圆公式（2）-（5）的证明

至于公式（6），根据刘徽在勾股章最后一题的注，可作如下推导。如图 4 所示，以 *BP* 为边长，作正方形 *ST*，以 *AQ* 为边长，作正方形 *QU*，则四边形 *TU* 是以 *AB* 为边长的正方形。易证正方形 *PQRS* 的面积等于矩形 *PV* 和矩形 *RW* 的面积之和，故得

$$(a+b-c)^2 = 2(c-a)(c-b),$$

于是，由公式（4）即得公式（6）。或者由图 5 得到正方形 *CHIJ* 的面积与长方形 *MINS* 相等（即后世杨辉的“勾中容横”和“股中容直”），也同样得到公式（6）。

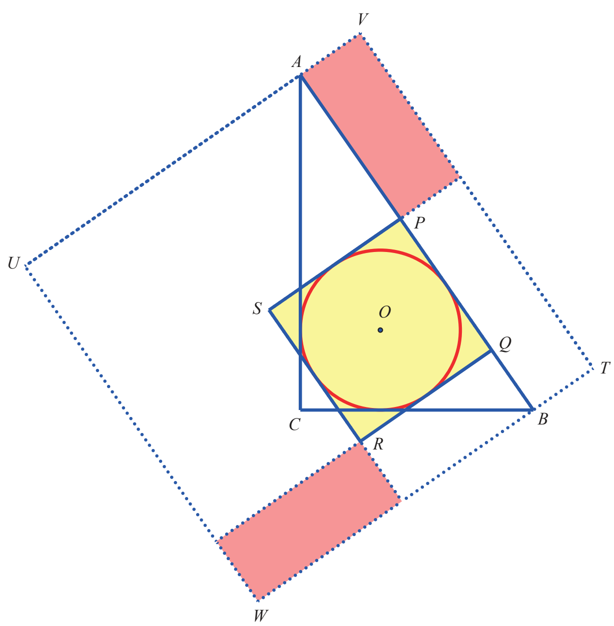


图 4. 关于勾股容圆公式（6）的证明之一