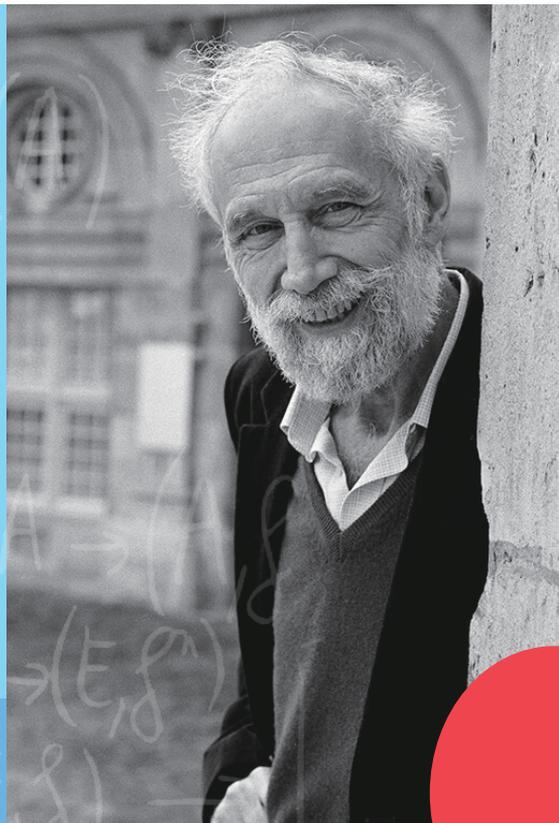


阿兰·孔涅 和他的非交换几何世界

范明



法国人认为数学是其传统文化中最优秀的部分，深以历史上众多数学家为自豪，巴黎共有 89 条以数学家名字命名的街道。在 1889 年建成的城市地标埃菲尔铁塔上，镌刻着 72 位法国科学家、工程师和其他知名人士的名字，包括拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、柯西、泊松、蒙日、傅里叶等 24 位著名数学家。在 1936-2022 年间召开的国际数学家大会上，获得菲尔茨奖的 64 位数学家中有 13 位法国人，1982 年得主阿兰·孔涅（Alain Connes）就是其中杰出的一位。此外孔涅还获得 2000 年法国电力安培奖（Prix Ampère de l'Électricité de France）、2001 年瑞典皇家科学院克拉福德奖（Crafoord Prize）、2004 年法国国家科学研究中心金奖等一系列奖项。

孔涅从 1970 年代起一直致力于解决由量子物理学和相对论引起的数学问题，他成功地获得了冯·诺伊曼代数中几乎完整的单射因子分类。孔涅统一了算子代数领域中一些先前被认为是不同的概念，彻底改变了这一学科的面貌，并激发了大量后续研究。通过与数十位合作者的 250 多篇学术文章，孔涅在过去几十年里对现代数学的发展产生了重大影响。他还致力于算子代数在微分几何中的应用，发展了类似于著名的阿蒂亚-辛格指数定理的有关理论。孔涅开创了非交换几何这一全新的数学分支，在算子理论与数学和物理学中的许多基本问题之间建立了深刻联系。对于诸如数学的本质、时间的发生等科学哲学问题，他也提出了深刻独到的见解。

在自由的思考中成长

1947年4月1日，孔涅出生于法国南部戛纳附近的城市德拉吉尼昂(Draguignan)。他的祖父是一位法国工程师，在一战中阵亡，祖父母在德拉吉尼昂购买了一处庄园。孔涅的外祖父母来自阿尔及利亚，外祖母是一位钢琴家。他的母亲在摩洛哥出生，18岁时随其父母移民法国，后来成为一名医生。1944年，孔涅的父母在德拉吉尼昂相遇，两人生育了三个男孩，阿兰是中间的孩子。为了使孩子们接受更好的教育，在孔涅八岁时全家搬到马赛，在新家附近一所很好的学校圣查尔斯中学(Lycée St Charles)读书。他从小就对通过考试、参加比赛不感兴趣，而是着迷于自己的想法。孔涅小时候学过几年钢琴，始终对音乐情有独钟，他认为自己大脑的一部分是音乐性的。

1966-1970年间，孔涅在著名的巴黎高等师范学院(Ecole Normale)学习。巴黎高师创建于1794年，在法国大革命中饱经动荡。1808年经拿破仑一世和拉普拉斯整顿后重新开学，二百多年来培养了许多杰出的科学家、哲学家、文学家等精英人才，20世纪的巴黎高师以布尔巴基学派闻名。一战结束后一群优秀的法国青年进入高师学习，他们不满法国数学日益衰落的现状。1935年，亨利·嘉当(Henri Cartan)、让·迪厄多内(Jean Dieudonné)、安德烈·韦伊(André Weil)等人发起成立了这个数学家秘密团体，提出了“数学结构”的观点。这些年轻的数学家们以“布尔巴基”为笔名，在之后近半个世纪中撰写了鸿篇巨著《数学原本》(*Éléments de mathématique*)。

有人说巴黎高师毕业的数学家对数学有一种优雅的品位，孔涅也许就是这样一个高师人。大学第一年给他留下了美好的回忆，在那里孔涅和朋友们可以自由地思考数学问题，并不局限于课堂和书本。他们只须在年底通过一些小型



1956年摄于圣查尔斯中学，前排左二为孔涅(copainsdavant.linternaute.com)

考试，很多人日后成长为优秀的数学家。孔涅认为，当你开始做数学时必须要有自己的花园，即使它远离那些很时髦的东西。花园很小也没有关系，重要的是它是你自己的，你对它想了很多、喜欢它，并且把它作为一个起点。用他自己的话说：“我们或多或少是通过某个反叛行为才开始成为数学家的。”大学高年级时，孔涅参加了数论学家皮索（Charles Pisot）和分析学家乔凯（Gustave Choquet）组织的讨论班，并开始尝试进行数学研究。1970年孔涅参加了一个暑期物理学校，他在那里第一次接触到算子代数理论。

1971年七月，孔涅应邀参加在西雅图举办的一个学术会议，这是他和新婚妻子第一次前往美国旅行，因此并没有注意会议的主题。那时算子代数领域的一大热点是两位日本数学家富田稔和竹崎正道发展的 Tomita-Takesaki 模理论，使得沉寂了近 30 年的冯·诺伊曼代数重新引起关注，而孔涅开始研究这一理论的方式是一个机缘巧合的故事。孔涅夫妇首先飞往纽约看望他当时在普林斯顿的兄弟，他在书店挑选了一本看上去有趣的数学小册子，用以打发之后前往西部长达五天的火车旅行时间。在西雅图参加会议期间，孔涅发现那本书的作者竹崎正道竟然是会议的报告人之一，他因此决定只听竹崎的报告，并开始专注于 Tomita-Takesaki 模理论。

冯·诺伊曼代数是复希尔伯特空间上有界线性算子构成的自伴代数，对于弱算子拓扑封闭并且包含恒等算子，是测度论的非交换推广。匈牙利裔美国数学家冯·诺伊曼在 1929 年的论文《函数运算代数和正规算子理论》中首先提出“算子环”的概念，将有限维矩阵代数推广到无穷维向量空间，为研究物理世界中无穷自由度的系统提供了新的数学工具。1930-40 年代，冯·诺伊曼在博士后默里（Francis Murray）的协助下，研究了算子环的一些重要性质以及分类和构造，发表了一系列奠基性论文，也留下了许多尚未解决的问题。冯·诺伊曼去世后，在迪厄多内建议下，算子环被重新命名为“冯·诺伊曼代数”。

回到巴黎后，孔涅开始寻找在法国从事相关研究的数学家。当得知迪克斯米尔（Jacques Dixmier）是算子代数的领军人物之一时，他决定参加九月份迪克斯米尔主持的讨论班。在第一天的讨论班上，迪克斯米尔带来几篇论文，让参加者自行挑选并准备报告。孔涅随机地拿了其中一篇，在回家的火车上，他发现该文作者荒木不二洋（Huzihiro Araki）和伍兹（Edward James Woods）所做的事情实际上与 Tomita-Takesaki 模理论密切相关。当天孔涅就给迪克斯米尔写了一封信，并写出一篇四页的报告，阐述了 Araki-Woods 不变量可以用 Tomita-Takesaki 模理论计算。他从此步入研究生涯，开启了在数学王国神奇领地上的寻宝之旅。



从因子分类到非交换几何

2024 年满一百岁的迪克斯米尔于 1942 年进入巴黎高师学习数学，师从亨利·嘉当和加斯顿·朱利亚（Gaston Julia），1949 年获得巴黎大学博士学位。

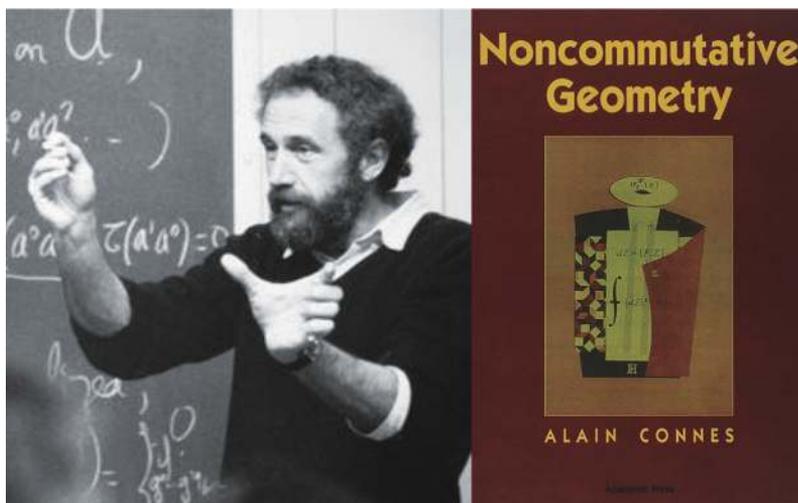
迪克斯米尔是布尔巴基学派的成员之一，但他认为自己在学派中属于比较中庸的一员。迪克斯米尔对布尔巴基学派的巨著《数学原本》的“李群和李代数”分卷做出了重要贡献，算子理论中的“Dixmier 迹”和李代数中的“Dixmier 映射”均以他的名字命名。迪克斯米尔年轻时阅读了默里和冯·诺依曼关于算子环的系列论文，1947年他曾拜见来访巴黎的冯·诺依曼，1954年在阿姆斯特丹国际数学家大会上聆听了冯·诺依曼的《数学中未解决的问题》主题演讲，1957年他用法文撰写了关于冯·诺依曼代数的第一本专著。

迪克斯米尔一共指导了 20 位博士生，孔涅是其中最杰出的一位。1971年他在自己的讨论班上第一次见到孔涅时有些吃惊，因为大部分参加者都是他的学生。孔涅关于 Araki-Woods 不变量的简洁证明给他留下了深刻印象，从那时起两人成为终生好友。在迪克斯米尔的指导下，孔涅用两年时间完成了博士论文《III 型因子的分类》，于 1973 年获得巴黎第六大学（现为索邦大学）博士学位。因子是具有平凡中心的冯·诺依曼代数，目的是为了探索量子力学中希尔伯特空间的非平凡分解。默里和冯·诺依曼将因子分为 I、II、III 型，利用态迹对前两种类型的因子进行研究。孔涅的主要工作是发现了冯·诺依曼代数新的同构不变量，并将 III 型因子进一步细分为 III_λ 型因子，这里 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

自从在普林斯顿发现竹崎正道写的书开始，又在西雅图遇到作者本人，再到巴黎拜师迪克斯米尔，其中似乎存在某种随机因素，因此有人说孔涅很幸运。但是他本人认为机缘巧合并不等同于幸运，可能开始有一定的随机因素，而随后却必须做大量工作。这些工作是以“那里有东西”的想法为指导的，这种直觉层面的想法或内在的驱动力在数学中比什么都重要，难以传递给他人。在前往奥斯陆访问挪威数学家斯托默（Erling Størmer）时，孔涅发现了博士论文中的重要结果。在六月北欧那些漫长的白昼里，太阳不会真正落山，因此给他留下了美好的回忆。孔涅说自己是为发现的乐趣而工作，而这种快乐是其他任何事情都无法替代的。

博士毕业后，孔涅继续自己在博士论文中提出的想法，取得了许多重要的研究成果。他证明了 II 型超有限内射因子的唯一性并对其自同构群进行分类，从而对于 $0 \leq \lambda < 1$ 得到了 III_λ 型超有限因子的几乎完全分类。这一抽象理论在同行中引起巨大反响，孔涅发展的研究方法日后也成为量子统计力学、 C^* 动力系统等领域的重要工具。1978 年，孔涅应邀在赫尔辛基国际数学家大会上作一小时报告，一颗数学新星冉冉升起。在 1983 年华沙国际数学家大会上，孔涅获得菲尔兹奖，荒木不二洋作了题为“阿兰·孔涅的工作”的大会报告，他指出：孔涅关于因子分类的工作“构成了冯·诺依曼代数理论中最完善和最引人注目的部分”。

非交换理论的源起可以追溯到 1925 年，海森堡（Werner Heisenberg）提出了量子力学中著名的“不确定性原理”：在一个量子力学系统中，一个运动粒子的位置和它的动量不可被同时确定，他因此与玻恩（Max Born）等人共同提出了矩阵力学的概念。类似的不确定性关系也存在于能量和时间、角动量



孔涅（摄于1989年）以及他的《非交换几何》英文版封面（alchetron.com）

和角度等物理量之间，冯·诺伊曼关于算子代数的奠基性工作，就是受到海森堡不确定性关系的启发。算子代数领域的一个标志性结果是1943年证明的Gelfand-Naimark表示定理，即紧豪斯多夫拓扑空间可以从该空间上函数的 C^* -代数中重建出来。在完成了超有限因子的分类工作之后，孔涅尝试将Gelfand-Naimark表示定理中空间与代数之间的交换对偶性扩展到非交换环境，获得了巨大成功。

在数学和量子物理学中，存在许多几何空间自然地对应于非交换代数。孔涅在与沙利文（Dennis Sullivan）、莫斯科维奇（Henri Moscovici）、鲍姆（Paul Baum）等数学家的交流与合作中不断产生新思想，提出了循环上同调（cyclic cohomology）理论及其与 K -理论的关系，逐步搭建起非交换几何学的框架。非交换几何学融合了分析、代数、几何、拓扑、物理、数论等多个领域，经典分析中的许多基本概念和工具均可扩展到非交换的情形，离散变量和连续变量作为算子共存并被同步处理。1990年孔涅出版了法文专著《非交换几何》，英文版于1994年问世，2001年的克拉福德奖就是表彰他对算子代数和非交换几何学理论做出的开创性和独特贡献。

孔涅的工作为理论物理的研究提供了强有力的新方法，包括标准模型和重整化理论，对于量子理论给予了全新的解释。彭罗斯平铺（Penrose tiling）和叶状结构（Foliation）是非交换几何空间的两个典型例子。彭罗斯平铺的一个显著特征是其局部同构性，因此是非交换几何技术的主要示例。孔涅发现黎曼表面上的测地线流Anosov叶状结构可以产生一类超有限的 III_1 型因子，在相对论量子场论中与局域代数同构。如果使用非交换代数作为坐标代数，这类空间就变得易于处理。孔涅将描述基本粒子的标准模型纳入了同一个几何空间，使得将引力场纳入标准模型成为可能，其最终愿景是实现对于宇宙中所有相互作用统一理论的几何学描述。