神奇的拉丁方与欧拉猜想（三）

翁林宸　彭小令　方开泰

5. 通向无限可能的十字路口

下面我们将会见证，拉丁方诞生的灵感以及它和一系列领域之间的奇妙联系。从数学的数论和几何，到统计的实验设计，再到物理的量子力学，最后到它们和计算机科学形成交叉的量子信息理论，当中的量子计算也展现出令人期待的未来。这些理论在现实里丰富多彩的应用，亦为我们创造出一个更加精彩纷呈的世界。

5.1. 数论的筛法

当欧拉猜想被推翻时，博斯（Raj Bose）和史瑞克汉德（Shartchandra Shrikhande）曾经预感到，他们联手帕克（Ernest Parker）完成的这一工作因为它的数论本质，将来可能引起数论学家们的关注。果然不出所料，很快他们的想法就得到了印证。

1959 年在美国科罗拉多州博尔德市举行的数论会议上，出生于英国的印度裔美国数学家周拉（Sarvadaman Chowla）、匈牙利数学家埃尔德什（Paul Erdős）和德国裔美国数学家施特劳斯（Ernst Straus），展示了自己的研究进展。特别地，他们从数论视角开启了正交拉丁方最大集合的探索，并且建立了它的渐进理论。后来在这个方向上诞生了一系列的工作，很大程度推动着它的发展。周拉、埃尔德什和施特劳斯首先表示，博斯、史瑞克汉德和帕克的重要发现推翻了欧拉猜想。然后在没有涉及全新组合见解之下，他们只是基于博斯、史瑞克汉德和麦克尼希（Harris MacNeish）关于拉丁方的结果，完全通过数论的方式展示出这个结论能够被更进一步地加强，从而得到

$$\lim_{n\to\infty} N(n) = \infty.$$

随之周拉、埃尔德什和施特劳斯通过挪威数学家布伦（Viggo Brun）的筛法，并且使用德国裔美国数学家拉德马赫（Hans Rademacher）的结果来得到 $N(n)$ 的下界估计。特别地，他们证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) > \frac{1}{3} n^{\frac{1}{91}}.$$

周拉、埃尔德什和施特劳斯在最后部分留下的评论也具有启发意义，为后来发展的工作指引着方向。一方面他们表示，在自己结果里的指数 1/91 远非最佳可能，因为其中并未使用当时最好的筛法，亦非将所用筛法发挥到极致。更为重要的是，周拉等三人表明了一些可能实现改进的关键地方，他们的长远眼光将在后来威尔逊（Richard Wilson）1974 年的工作中得以体现。不过他们三人同时也指出当前方法在理论上的局限所在。另一方面，他们亦将自己的工作联系到了麦克尼希猜想，揭示出这一结果似乎排除了对它进行合理改进的可能性，并且解释了其中原因。

值得一提的是，在 1960 年《加拿大数学杂志》（*Canadian Journal of Mathematics*）的第 12 卷上，从第 158 页一直到第 208 页连载了 4 篇关于正交拉丁方的论文。它们都对这一研究方向的理论发展做出了显著贡献，最后两篇正是来自博斯、史瑞克汉德和帕克证明欧拉猜想不成立的工作，与周拉、埃尔德什和施特劳斯彻底推翻欧拉猜想的工作。

不久之后，关于 $N(n)$ 的下界估计便得到改进。1964 年美国数学家罗杰斯（Kenneth Rogers）延续着周拉等人的方法，唯一的不同之处在于他使用了俄罗斯数学家（曾经的苏联时期）布赫斯塔布（Aleksandr Buchstab）而非拉德马赫的结果。然后罗杰斯证明：对于任意的 $\epsilon > 0$，存在一个与 ϵ 有关的常数 n_ϵ，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) > n^{\frac{1}{42+\varepsilon}}.$$

筛法是解析数论的重要工具，它有着丰富而又美妙的历史。一些古老的数学猜想，例如哥德巴赫猜想和孪生素数猜想，也不断为当中的理论发展赋予新的灵感。1949 年英国裔加拿大数学家詹姆斯（Ralph James）在回顾关于哥德巴赫猜想的研究进展时表示，筛法最初源自 1920 年布伦的工作，随后得到一系列改进，例如 1924 年拉德马赫和 1940 年布赫斯塔布的结果，以及其他数学家的一些工作。而在当时，通过筛法得到的最好结果是来自布赫斯塔布的工作。因此不难看出，在筛法上的改进也能帮助我们得到关于 $N(n)$ 更好的下界估计。

实际上，1964 年中国数学家王元院士也改进了周拉等三人的工作，并且得到比罗杰斯更好的结果。首先他得出结论：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有 $N(n) > n^{\frac{1}{28}}$。随后 1966 年王元展示了之前宣布结果的详细证明，甚至还稍微地加以改进。他将周拉等人的方法进行推广，并且阐明 $N(n)$ 和筛法的关系，因而揭示出 $N(n)$ 下界估计的关键之处。特别地，王元综合运用布伦、布赫斯塔布和挪威裔美国数学家塞尔伯格（Atle Selberg）的工作来代替原先布伦的方法。最后证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) > n^{\frac{1}{26}}.$$

值得一提的是，这些方法的综合应用最先出现在王元关于哥德巴赫猜想的一系列工作中。众所周知，他曾经为这一研究方向做出了重要贡献，亦是筛法的集大成者。因此我们也不难想象，王元能够为 $N(n)$ 的下界估计实现如此显著的提升。

在此我们也不得不提到传奇数学家塞尔伯格卓越的数学成就，其中之一便是对布伦所提出筛法的推广。最后他赢得了 1950 年的菲尔兹奖和 1986 年沃尔夫奖，以及 2002 年的阿贝尔终身成就奖 [1]。

前面说到周拉、埃尔德什和施特劳斯从两方面提示了对 $N(n)$ 下界的数值估计做出改进的可能性。正如他们所预想的那样，1974 年威尔逊证实了其中的想法之一，因而为自己的突破起到了推动作用。另外，他也和罗杰斯一样使用了布赫斯塔布这一已知的数论结果。当然，威尔逊所用到的新的组合构造也很重要。最后他证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) > n^{\frac{1}{17}} - 2.$$

从基德威尔（Anthony Keedwell）和德内斯（József Dénes）所写的另一本名为《拉丁方和它们的应用》（*Latin squares and their applications*）的著作中我们能够得知，他们在出版于 2015 年的第二版书里评价道：在一系列当 $n\to\infty$ 时 $N(n)$ 的渐进结果之中，1983 年德国数学家和计算机科学家贝斯（Thomas Beth）证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) \geq n^{\frac{5}{74}} = n^{\frac{1}{14.8}}.$$

接着基德威尔和德内斯表示，尽管只是作为对贝斯结果的微小改进，当前的最佳世界纪录出自中国数学家陆鸣皋教授的工作。其中他的中文和英文版本，分别发表于 1984 年和 1985 年。陆鸣皋首先表示，凭借威尔逊的方法和王元的筛法可以证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) > n^{\frac{1}{15}}.$$

更加重要的是，接着他通过改进威尔逊的方法，并且使用 20 世纪七八十年代发展而来的筛法，最后证明：存在常数 n_0，当 $n > n_0$ 时有

$$N(n) \geq n^{\frac{10}{143}} - 2 = n^{\frac{1}{14.3}} - 2.$$

1981 年，埃尔德什曾经提及一系列自己最想看到被解决的组合问题，其中之一便是 $N(n)$ 的下界估计。正如他所描述的那样，它是充满着挑战性而又十分吸引人的。据埃尔德什回忆道，自从他和周拉以及施特劳斯的工作完成之后，最初发展的渐进理论已经得到大量改进，并且猜想最后结论可能是

[1] 阿贝尔终身成就奖（Honorary Abel Prize）是在 2002 年阿贝尔奖设立之初所颁发的特别奖项，尽管这并 非正式的阿贝尔奖，但也依然是对塞尔伯格非凡成就的致敬。

$N(n) > cn^{\frac{1}{2}}$。在依依不舍地告别欧拉猜想之后，正交拉丁方又在埃尔德什猜想中焕发出全新的生命力。

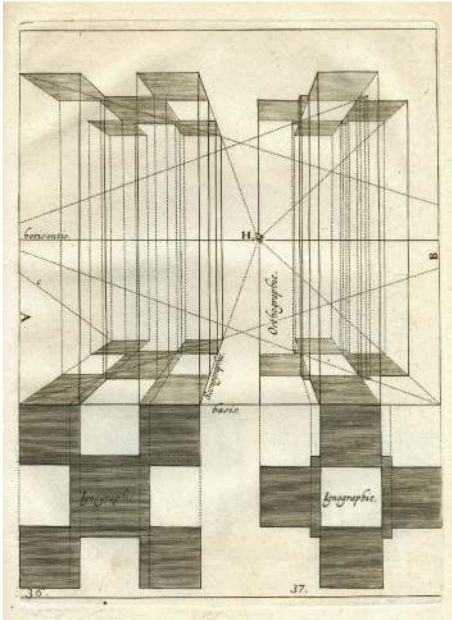
值得一提的是，除了在拉丁方的研究历史里分别留下印记，两位传奇的数学家埃尔德什和欧拉之间也有很多有趣的联系。在 1998 年纪念埃尔德什的文章中，匈牙利数学家鲍鲍伊（László Babai）和美国数学家斯宾塞（Joel Spencer）情不自禁地赞赏道：在很多方面埃尔德什都是 20 世纪那个时代的欧拉。首先体现在两人的研究方向十分广泛，不仅涉及众多数学领域，而且都对它们产生了深远影响。然后它也体现在他们都是高产的数学家，据美国作家霍夫曼（Paul Hoffman）为埃尔德什所写的人物传记《数字情种》（*The Man Who Loved Only Number*）记载，埃尔德什一生共发表了将近 1500 篇论文，加起来的页数仅次于欧拉的。后者共发表了超过 800 篇论文，在实际篇数上不如埃尔德什。在 1998 年另一篇追忆埃尔德什的文章里，匈牙利裔英国数学家博洛巴斯（Béla Bollobás）称赞道，更令欧拉和埃尔德什显得与众不同的是，他们超过一半的工作都是在自己人生的最后二十年里完成的。埃尔德什也因为在数学上的非凡贡献被授予 1951 年的柯尔数论奖，成为曼恩（Henry Mann）之后的下一位得主。后来他还和享誉世界的华裔美国数学家陈省身先生一起分享了 1983–1984 的沃尔夫奖。

经历完和拉丁方的浪漫邂逅，筛法自身在数论中的故事也依旧延续着。建立在 2009 年美国数学家戈德斯通（Daniel Goldston）、匈牙利数学家平兹（János Pintz）和土耳其数学家伊尔迪里姆（Cem Yildirim）工作的基础之上，华裔美国数学家张益唐和英国数学家梅纳德（James Maynard）分别在 2014 年和 2015 年对筛法作出关键改进，从而实现了在孪生素数猜想上的重要突破。正因如此，张益唐、戈德斯通、平兹和伊尔迪里姆被授予了 2014 年的柯尔数论奖。而梅纳德也因对解析数论，包括这一方向和其它素数理论的杰出贡献成为 2020 年的柯尔数论奖得主，并且为自己赢得了 2022 年的菲尔兹奖。

5.2. 几何的射影平面

对于数学家们来说，没有什么比不同领域之间意想不到的联系显得更加美妙。更加重要的是，射影几何正如欧拉猜想一样，似乎也有着令人难以置信的起源——传说中它诞生于意大利文艺复兴初期的艺术家们之手。当时流行一种透视画法，即在二维平面中展现出三维物体和场景。比如说要在地板上绘制方形瓷砖，这些瓷砖不会都被画成具有相同大小和彼此平行的样子——这会产生一种从上面俯视的视觉效果。相反地，每块瓷砖的两条对边需要被画得逐渐靠近，离得越远的那些瓷砖需要被画得越小。

通过铁路轨道我们能很自然地联想到——当平行轨道往远处延伸时，它们似乎在地平线上相遇。这幅景象亦体现在投影几何之中。想象一个位于无穷远处的点，在那里一系列平行线相遇。或者换一种说法，无穷远处的一点可以被认为是一个位于平行线族中每个成员上的点。这个设定确保平面上的任何两条线，无论是否平行都会相遇。不同的平行线族将在无穷远处的不同点相遇，这



当文艺复兴邂逅射影平面（The Trustees of the British Museum, 1974）[2]

些点将构成无穷远处的一条线。这样一条无穷远处的线与一个普通平面一起，构成了一个有限射影平面。

定义 1.

有限射影平面（finite projective plane）：n 阶有限射影平面是一个有着 n^2+n+1 个点和线的集合，并且满足：

1. 每条线包含数量相同的 $n+1$ 个点；
2. 每个点位于 $n+1$ 条线上；
3. 每两条线必相交于一点；
4. 每两个点必在一条线上。

在这个定义中，它的第三个条件诠释了射影的含义：如果投影到无穷远处，即使平行线也会相交，这和经典几何不同；而它的第四个条件则是满足经典几何的性质。另外，这个定义还强调了奇妙的对偶性。纵然我们交换上述定义中的点和线，对这些结论也不会产生任何影响。

射影几何的研究最早出现在 19 世纪法国数学家和工程师庞斯莱（Jean-Victor Poncelet）以及高斯的学生德国数学家冯 - 斯陶特（Karl von Staudt）分

[2] The Trustees of the British Museum(1974).Series: Grondige onderrichtinge in de Optica of te Perspectieve Konste(Two checkerboard patterns shown from various perspective angles. 1622 Engraving). https://www.britishmuseum.org/collection/image/1045296001.