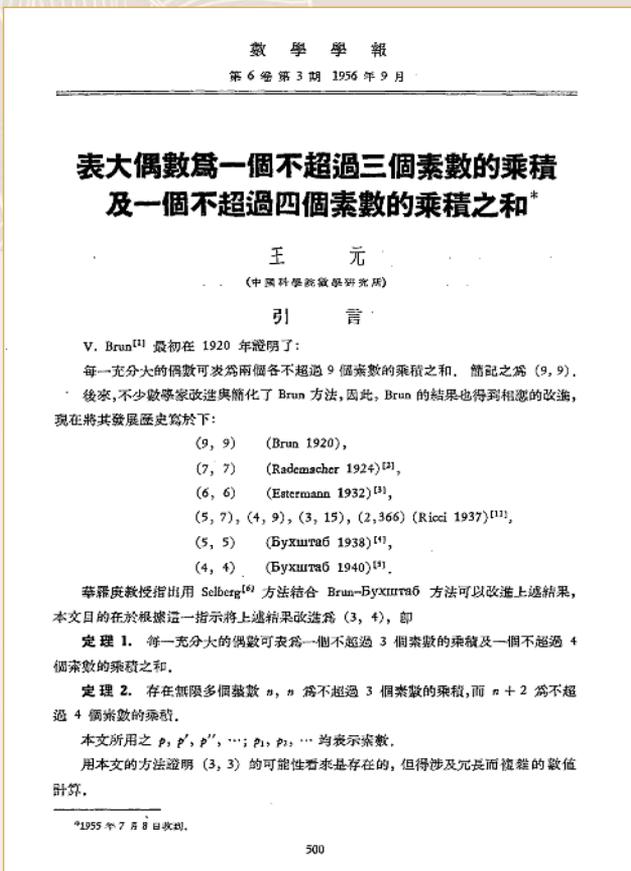


# 元老与 (3+4)

## 纪念王元先生证明 (3+4) 定理七十周年

刘建亚



七十年前，一位年轻的数学家，在哥德巴赫猜想这座数学高峰上，继华罗庚之后留下了第一个属于中国人的足迹。他，就是王元，当时只有 25 岁。1955 年，王元在哥德巴赫猜想的研究中取得重要突破，证明了命题 (3+4)。他的论文《表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和》于 1955 年 7 月投稿至《数学学报》，次年 9 月发表，轰动国内外。

王元 (3+4) 论文首页

## 一、哥德巴赫猜想与筛法

数论是研究整数性质的学科，而大于1的整数都可以分解为素数的乘积，因此素数分布问题是数论研究的核心领域之一。哥德巴赫猜想以其简洁的语言预测了素数之间的加法关系，被誉为数学王冠上的明珠，是数学史上最著名且最具挑战性的问题之一。1742年，哥德巴赫在与欧拉的通信中提出了这一猜想：任何一个大于2的偶数都可以表示为两个素数之和。这一命题看似简单，却深刻揭示了素数分布的规律性，吸引了无数数学家的关注。希尔伯特（D. Hilbert）曾将哥德巴赫猜想收入其著名的23个数学问题之中，此后哈代（G. H. Hardy）、利特伍德（J. E. Littlewood）、维诺格拉多夫（I. M. Vinogradov）、华罗庚等数学大师，都先后对哥德巴赫猜想做出了杰出贡献。

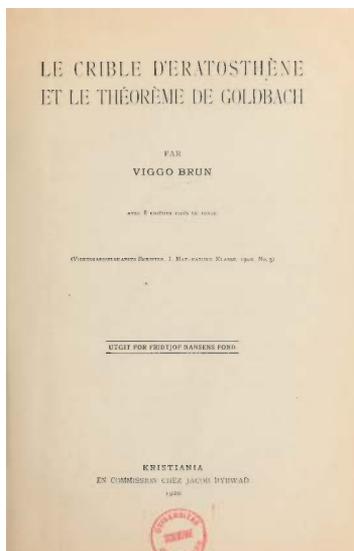
20世纪初，数学家们开始尝试用筛法研究哥德巴赫猜想。简单说来，筛法就是容斥原理的深化与细化，其核心思想是通过筛掉合数来保留素数。这种过度简化的说法，虽然有助于理解筛法的性质，但是完全不能传递筛法的极其复杂、艰深的一面。基于筛法的特点，学习筛法最好的方法是研读论文，而非仅仅听讲。正如本文作者在不同场合多次强调的那样：“谁要是想让听众一下子就打消了学习数论的念头，谁就给他们讲筛法的证明。”这句话，虽有自嘲调侃的成分在内，但是确实符合实际情况。

素数是不可分解的，它仅有一个素因子，即其本身。在数论中，殆素数（almost prime）是指与素数接近的整数，例如  $6 = 2 \times 3$  和  $8 = 2 \times 2 \times 2$ ，分别有两个和三个素因子。我们用记号  $(a+b)$  表示命题：大偶数都可以表示为两个殆素数之和，其中一个殆素数的素因子个数不超过  $a$ ，另一个殆素数的素因子个数不超过  $b$ 。因此，哥德巴赫猜想就是命题  $(1+1)$ 。

筛法不仅可以用来寻找素数，还可以用来寻找殆素数。1920年，挪威



布伦



布伦 1920 年论文封面



布赫施塔布



布赫施塔布 1938 年论文首页

数学家布伦 (V. Brun) 证明了命题 (9+9), 这一成果开启了筛法在哥德巴赫猜想研究中的应用。随后, 国际上—批数学家不断改进筛法, 逐步降低了命题 (a+b) 中的素因子个数。1938 年, 前苏联数学家布赫施塔布 (A. A. Buchstab) 将结果推进到 (5+5), 1940 年, 他又证明了 (4+4)。这些成果为后续研究奠定了基础。

## 二、华罗庚与哥德巴赫猜想讨论班<sup>1</sup>

华罗庚曾指出:“哥德巴赫猜想真是美极了, 现在还没有一个方法可以解决它。”早在 1938 年, 在剑桥大学访学期间, 华罗庚就证明了几乎所有的偶数都可以表示为两个素数之和, 即哥德巴赫猜想对几乎所有的偶数都成立。这一成就使华罗庚成为哥德巴赫猜想研究的世界顶级专家。

1953 年, 华罗庚在中国科学院数学研究所组织了一个专门研究哥德巴赫猜想的讨论班。他以深厚的数学造诣和高瞻远瞩的学术眼光, 为讨论班制定了明确的研究方向, 并鼓励年轻人创新。这个讨论班为新中国培养了一代杰出的数论学家。华罗庚选择哥德巴赫猜想作为讨论班的主题, 是因为这一猜想与解析数论中所有的重要方法都有联系。通过学习研究哥德巴赫猜想, 青年学者能够掌握解析数论中最重要的方法。讨论班的研究计划涵盖了当时国际上研究哥德巴赫猜想的最先进方法与成果, 包括塞尔伯格 (A. Selberg) 的  $\Lambda^2$  上界方法、布伦筛法、布赫施塔布方法等。

讨论班由年轻人轮流主讲, 王元是主要演讲人之一。华罗庚在讨论班上

<sup>1</sup> 以下两节, 参照了王元口述《我的数学生活》, 李文林、杨静访问整理, 科学出版社, 2020。