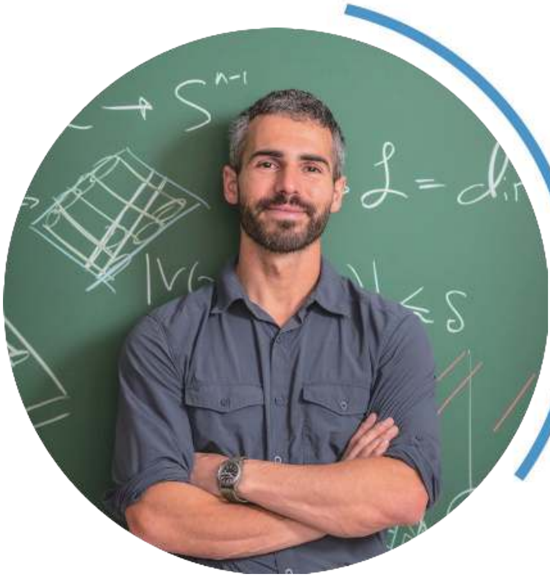
合作与交流的胜利
——三维挂谷猜想证明

倪 忆

王虹在北大数学 110 周年校友论坛期间参加交流（图源：BICMR 网站）



扎尔（图源：Quanta 杂志）

近日，纽约大学副教授王虹与加拿大不列颠哥伦比亚大学副教授扎尔（Joshua Zahl）在预印本网站上贴出一篇证明“三维挂谷猜想”的论文，轰动了整个数学界。这项工作过于重要，两位作者又很年轻，有资格竞争明年的菲尔兹奖（王虹甚至 2030 年都有机会），以至于这个话题出圈到数学界之外，引发热议。

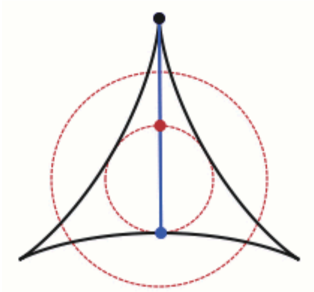
挂谷猜想是数学界合作与交流的范例。一代代的数学家把来自不同领域的思想和方法引入到对挂谷猜想的研究当中，合作攻克了一个又一个难关，终于带来了阶段性的重大突破。这其实才是数学研究的常态，而非大众心目中在书斋内孤军奋战。

挂谷猜想是什么?

挂谷猜想的历史需要从与之相关的“挂谷转针问题”讲起。1917 年，日本数学家挂谷宗一提出了这样一个问题：把一条长度为 1 的线段在平面上移动，使其方向旋转 360°，那么这条线段扫过的最小面积是多少?

挂谷宗一（图源：东京大学）

容易发现，如果线段只是绕着一个固定的轴心旋转，那么扫过的面积最小是 $\pi/4$。但是，线段在这一过程中完全可以平移。挂谷宗一找到了一个例子，其中线段扫过的面积是 $\pi/8$。挂谷和其他一些数学家都猜测这就是最小面积。(挂谷最初的问题里可能要求扫过的图形是凸集，但笔者无法找到原始文献加以确认。加上凸集条件后，匈牙利数学家帕尔（Julius Pal）证明面积最小的是高为 1 的正三角形。)



挂谷宗一发现的例子（图源：维基百科）

后来另外一位数学家矢野健太郎在描述这一问题时，采用了如下形式：

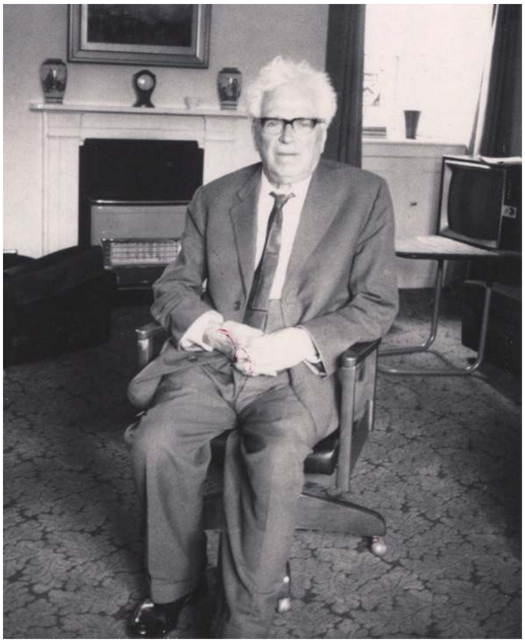
一位武士，在上厕所时遭到敌人袭击。矢石如雨，而他只有一根短棒，为了挡住射击，需要将棒旋转一周（360°）。但厕所很小，因此在转动短棒时，

应当使短棒扫过的面积尽可能小。面积可以小到多少？

这个不讲武德的故事虽然槽点满满，却给人以深刻印象，从而流传很广。可见，选择一个生动有趣的方式来普及数学是多么重要！

挂谷转针问题很快引起了国际关注。1925 年，当时美国数学界领袖伯克霍夫（George Birkhoff）在书中将这一问题跟著名的四色猜想相提并论。

比挂谷宗一稍晚，1919 年，俄国数学家贝西科维奇（Abram Besicovitch）在研究二重积分的时候，提出了一个类似的问题：如果平面上的一个点集在每个方向上都包含一条长为 1 的线段，那么这个点集最小的“面积”是多少？这里的“面积”在数学中其实有一个更严格的术语，称为“测度”（measure）。贝西科维奇所考虑的点集，跟挂谷宗一所考虑的非常相似，仅有的区别是，贝西科维奇并不需要线段能够在点集中连续地转动。贝西科维奇用了一个非常巧妙的方法，构造出了满足条件的测度为 0 的点集。



贝西科维奇（图源：Paul R. Halmos Photograph Collection）

当时俄国处于战乱之中，跟国外交流不便，所以贝西科维奇并不知道挂谷转针问题。他的工作发表在彼尔姆国立大学物理数学学会的学报上，外界也很难获得。1924 年贝西科维奇移民至西方，在那之后才听说了挂谷转针问题。他把自己原来的构造略加修改，加上帕尔的想法，构造出了面积可以任意小的能让长度为 1 的线段在其中旋转 360° 的图形，从而解决了挂谷转针问题。

是的，挂谷原先提出的转针问题已经被贝西科维奇完全解决了。在高维空间中也可以提类似的问题，但答案并没有本质的区别。现在数学家所研究的“挂谷猜想”，其实是一个全新的问题。在这一点上，近期许多报道都犯了错误。

如果一个点集在每一个方向上都包含一条长度为 1 的线段，那么这个点集

就被称为挂谷集合（Kakeya set）。注意这里不要求线段能够连续转动，跟挂谷最早研究的点集不太一样。所以很多人也把它称为贝西科维奇集合（Besicovitch set）。同样的定义也可以延伸到高维空间。根据贝西科维奇的结果，挂谷集合的测度最小可以是 0，这个结论在高维空间中同样正确。

但是数学家们并不满足，他们进一步问：挂谷集合的维数是多少？在数学上，对于挂谷集合这类“怪异”的图形，有好几种方法定义其“维数”，取值可以不是整数，即分形维数。常用的分形维数有豪斯多夫（Hausdorff）维数和闵可夫斯基（Minkowski）维数。数学家猜测，n 维空间中挂谷集合的（豪斯多夫或者闵可夫斯基）维数一定是 n。这就是挂谷猜想（Kakeya Conjecture），又称为挂谷集合猜想（Kakeya Set Conjecture）。不过，就像很多数学名词一样，这个猜想虽然冠以挂谷的名字，但跟挂谷的研究已经没有直接关系了。

挂谷猜想表明，尽管挂谷集合的测度可以是 0，但挂谷集合仍然“很大”。这在一定程度上符合挂谷最初的直觉，只是挂谷采用“面积”来衡量挂谷集合该有多大这一点是不正确的。

挂谷猜想为什么重要？

挂谷猜想是几何测度论这门数学分支里的核心问题之一。希尔伯特曾经说费马大定理是一只会下金蛋的鹅，这是因为对费马大定理的研究极大地推动了代数数论的发展。同样的评价也可以用在挂谷猜想上。

挂谷猜想不是一个孤立的问题，而是一系列类似问题中的一个，这些问题统称为“挂谷类型问题”。对其中一个问题的突破往往会带来其它问题上的进展。

挂谷猜想跟调和分析里最核心的几个问题密切相关，在偏微分方程和解析数论里也有应用。调和分析是由对傅立叶级数和傅立叶变换的研究发展起来的一门数学分支。它跟偏微分方程、数论、表示论、组合数学等多个数学分支都有深刻联系，并且在信号处理、图像压缩等方面里有着广泛应用。我们日常上网看到的大量图像、视频，其背后都有调和分析的功劳。

早在 1919 年，贝西科维奇研究挂谷集合的初衷就是为了解决一个跟二重积分有关的问题，这预示着挂谷集合必然会跟调和分析联系起来。调和分析里最基本的问题是傅立叶级数和傅立叶变换什么时候收敛，以及在什么意义下收敛。在六十年代有一个著名的“圆盘猜想”，对于傅立叶级数和傅立叶变换的博赫纳 - 里斯平均（Bochner-Riesz mean）的收敛性作出了预测。然而，1971 年，费弗曼（Charles Fefferman，1978 年菲尔兹奖得主）利用挂谷集合构造出了圆盘猜想的反例。这在当时是一个出乎意料的结果，连费弗曼自己都表示惊讶。

费弗曼的论文发表在《数学年刊》上，其中关键一步使用了坎宁安（Frederic Cunningham, Jr.）不久前发表在《美国数学月刊》上的一篇关于挂谷转针问题的论文。《数学年刊》是数学界最好的专业杂志，《美国数学月刊》则是一份面向高中生、大学生、数学教师和数学爱好者的普及性刊物，主要刊登初等数学和数学教育方面的文章。很多专业数学家或许会对《美国数学月刊》不屑一顾，

但在这个例子里，《美国数学月刊》上发表的论文也为最顶级的数学成果提供了坚实的基础 。

作为对圆盘猜想的修正，数学家们提出了博赫纳 - 里斯猜想。如果挂谷猜想不正确的话，那么用费弗曼同样的方法就能构造出博赫纳 - 里斯猜想的反例。也就是说，博赫纳 - 里斯猜想蕴含挂谷猜想！

同样采用费弗曼的方法，人们发现傅立叶变换的限制猜想蕴含挂谷猜想。限制猜想是调和分析里最重要的问题，它研究的是一个函数的傅立叶变换什么时候可以定义在 n 维空间的一个低维子集上。理论上说，可以通过证明限制猜想来证明挂谷猜想。不过，包括陶哲轩（2006 年菲尔兹奖得主）在内的很多专家都认为，要想证明限制猜想，必须先证明挂谷猜想。

1999 年，陶哲轩证明博赫纳 - 里斯猜想蕴含限制猜想。还有一个相关联的猜想是波动方程的局部光滑化猜想，它蕴含博赫纳 - 里斯猜想。所以挂谷猜想、限制猜想、博赫纳 - 里斯猜想、局部光滑化猜想，这四个猜想是一个层层递进的关系：挂谷猜想居于最基础的地位，越往后的猜想越强。

挂谷猜想的基本的重要性还体现在布尔甘（Jean Bourgain，1994 年菲尔兹奖得主）的开创性工作中。布尔甘在 1991 年发现，从某些挂谷类型猜想出发也能在一定程度上推出限制猜想。这方面后来又有一系列成果，最新进展是在 2024 年末，王虹和吴澍坤提出了一个新的挂谷类型猜想，并证明这个猜想蕴含限制猜想。

布尔甘对挂谷猜想做了大量奠基工作。他率先把加性组合学（additive combinatorics）引入到对挂谷猜想的研究之中。后来他与合作者们所得到的和 - 积估计（sum-product estimate）更成为研究包括挂谷猜想在内的一大批问题的

布尔甘与陶哲轩一同领取 2012 年克拉福德奖（图源：Crafoord Foundation）