基尔霍夫定律和矩阵树定理

——电学对早期图论研究的启发

宋 宁 孙振龙 王建锋

1. 引言

图论，她是如此年轻的一个数学分支，以至于她的历史几乎就是它的现在。虽然我们可以将最早的图论研究追溯到 1736 年的柯尼斯堡七桥问题，但图论正式诞生的标志却是 1936 年匈牙利数学家柯尼希（Dénes König）出版的《有限与无限图论》[1]。在 1736 年至 1936 年这长达二百年的孕育期里，图论这个幼小的胎儿在数学母亲的子宫中静静地吸收着营养。最初为她提供养分的脐带毫无疑问是几何学和拓扑学，但随着线性代数的逐渐成型，尤其是十九世纪四十年代开始，代数学对图论的影响逐渐增大。出人意料的是，电学在这个过程中扮演了颇具戏剧性的角色。

本文将介绍代数图论中著名的矩阵树定理（Matrix-Tree Theorem），以及它与电气工程中广泛使用的基尔霍夫定律（Kirchhoff's Laws）之间的往事。

2. 基尔霍夫和他的定律

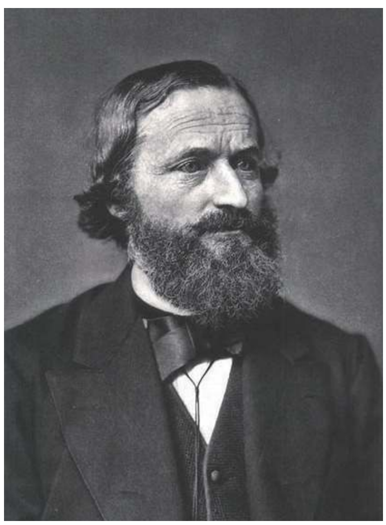
我们的主人公，德国著名物理学家和数学家基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff）于 1824 年 3 月 12 日出生在普鲁士王国旧都柯尼斯堡（现俄罗斯加里宁格勒）。在基尔霍夫出生的时代，第一次工业革命的浪潮已经渐渐平息，第二次工业革命的澎湃力量尚在酝酿，而电气科技作为第二次工业革命的标志之一却已悄悄展露头角：1820 年，丹麦物理学家奥斯特发现电流的磁效应；

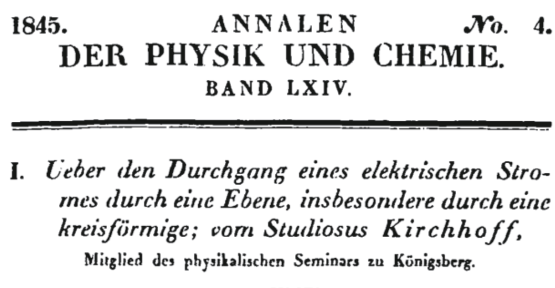
[1] Dénes König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

1825 年，法国科学家安培提出安培定律；1826 年，德国物理学家欧姆提出欧姆定律；1831 年，英国物理学家法拉第发现电磁感应现象……，这个即将到来的电气时代仿佛天际线上的航船已经隐隐在海雾中露出了桅杆。

不过，幼小的基尔霍夫才不会在意这些，他从小活泼健谈、口才颇佳，喜欢朗诵和文艺表演且长于表达，为人纯朴乐观、乐于助人，做事认真负责，毫不马虎。他的父亲是当地法院的一名法官，给孩子们提供了优渥的生活条件，让他与两个哥哥度过了快乐的童年。

1842 年，基尔霍夫进入柯尼斯堡大学学习。当时，数学家雅可比（Carl Jacobi）和物理学家弗朗茨 • 诺伊曼（Franz Neumann）正在柯尼斯堡大学组织数学物理讨论班。其中，诺伊曼的早期工作研究晶体学，但此时他深受贝塞尔（Friedrich Wilhelm Bessel）和雅可比的影响，已经转向新兴的数学物理，并开始关注电流流动的普遍定律。在进入大学的第二年，基尔霍夫就加入了诺伊曼和雅可比的讨论班。同年，雅可比被诊断出重病，不得不前往温暖的意大利疗养。于是，诺伊曼成为了基尔霍夫的导师，基尔霍夫也由此开始关注电流问题。





1845. ANNALEN No. 4.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND LXIV.

I. *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige; vom Studiosus* Kirchhoff,
Mitglied des physikalischen Seminars zu Königsberg.

(a) 基尔霍夫　　(b) 1845 年论文

图 1. 基尔霍夫及其论文

彼时，随着电气技术的迅猛发展，包含多个元件、多个支路的网状电路已经广泛出现，过去那些仅能解决单一串联、并联电路的公式已经不能满足技术发展的需要，对复杂的网状电路进行统一的刻画，已经成为电气工程技术上的重要课题。 1845 年，年仅 21 岁的基尔霍夫在当时德国的顶级期刊《物理化学年刊》上发表论文《关于薄板特别是圆形板的导电性》[2]。虽然这篇论文的题

[2] G. R. Kirchhoff. Ueber den Durchgang eines electrischen Stromes dutch eine Ebene unbesondere durch eine Kreisformige. Ann. Phys. Chem. 64 (1845) , pp. 497-514.

目似乎难以引人关注，但在正文之后所附属的两页半注释中却别有洞天。在倒数第二页的注释中，基尔霍夫给出了如下两条定律。

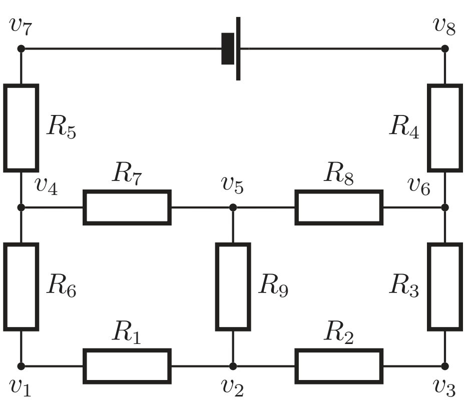
定律 1. 所有进入某节点的电流总和等于所有离开该节点的电流总和。

定律 2. 闭合回路中电压的代数和为零。

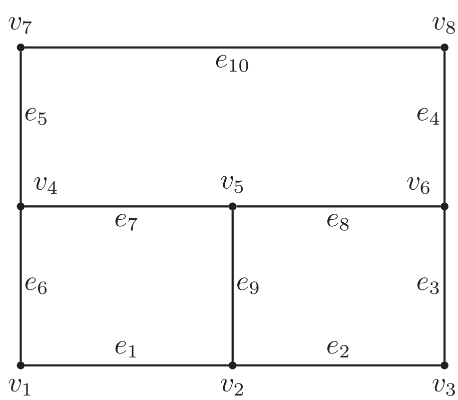
这就是我们现在所熟知的基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。它们共同构成了处理复杂网络状电路问题的核心工具，为电路分析奠定了基础，成为了电路理论的重要基石，对于电气工程和电子学的发展具有里程碑意义。那么基尔霍夫定律与代数学以及早期图论的研究又有什么关系呢？

3. 电流空间和电压空间

这里所说的“基尔霍夫定律”指的是该定律所适用的最基本也最重要的稳态直流情形。对复杂电路来说，两个基尔霍夫定律分别隐含着一个非常庞大的线性方程组，但是各个支路中具体使用了什么样的电子元件却似乎与此无关。因此，我们可以将电路图中所有支路上的电子元件忽略，将各个节点看作顶点，将各个支路看作边，那么整个电路图就抽象成了一个无向图（简称图）。在这个无向图上，考虑从一个顶点 v 开始、到另一个顶点 u 终止的序列 P。如果在 P 上的顶点和边交替出现，相继出现的顶点和边之间相互关联并且任何两个顶点不重复，那么就称 P 是该无向图上的一条路，称 u 和 v 是路 P 的两个端点。如果在路的两个端点之间添加一条边，那么就得到一个圈。如果某个无向图上任意两顶点之间都有路相连，那么就称这个无向图是连通的。由于一个完整的电路图本来就是连通的，所以本文仅考虑连通图。



(a) 电路图



(b) 无向图

图 2. 电路图及其对应的无向图

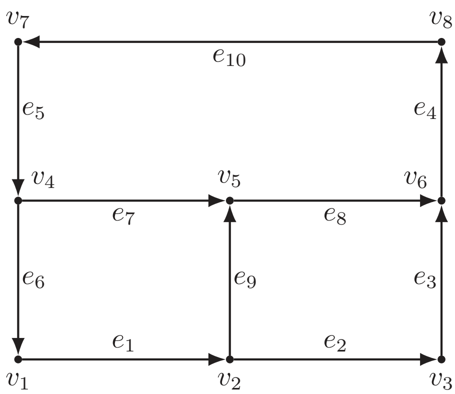
图 2(a) 所展示的是一个电路图，而图 2(b) 所展示的就是其对应的无向图，我们按图论的习惯将其命名为 $G(V, E)$，其中，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_8\}$ 是顶点集，$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_{10}\}$ 是边集。接下来，对 G 的每条边都给出定向（具体取什么方向都可以），记所得的定向图为 D，其顶点集和边集仍然分别记作 V 和 E。

对于有向边 $e = (u, v)$，通常称 u 是 e 的起点，v 是 e 的终点；也称 e 是 u 的出边，是 v 的入边。对顶点 v 来说，其所有出边的全体记作 $\partial^+(v)$，所有入边的全体记作 $\partial^-(v)$。图 3(a) 所展示的，就是图 G 的一个定向图 D。

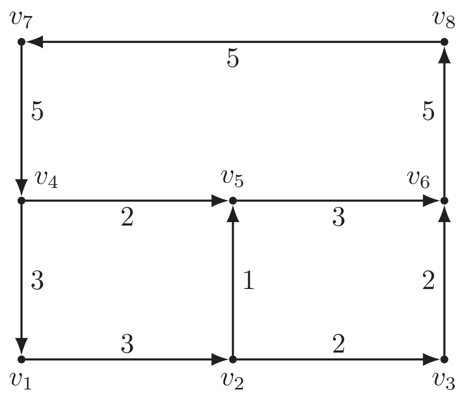
之所以要将无向图 G 定向为 D，是为了便于计算电流。实际上，在对边定向时每条边的具体方向是无所谓的，这是因为：若有向边 e 的电流方向与 e 一致，那么 e 上的电流流值取正值；否则只需将 e 上的电流值取相反数即可。在上述规则下，我们将各有向边 e_i 上的电流值记作 f_i。那么由基尔霍夫电流定律可知，

$$\sum_{e_i \in \partial^+(v)} f_i = \sum_{e_i \in \partial^-(v)} f_i, \tag{1}$$

在现代图论和组合最优化理论中，等式 (1) 也称流守恒条件。满足流守恒条件的向量 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^\top$ 也叫环流。给出环流的定向图 D 也被称为电网络，如图 3(b) 所示。



(a) 图 G 的定向图 D



(b) 电网络 D 上的一个环流

图 3. 定向图及其环流

如果使用现代数学中的矩阵来表示流守恒条件，那么会得到更加直观和清晰的认识。对于上述定向图 D，我们考虑一个 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$，其中 n 和 m 分别是 D 的顶点数和边数，而 m_{ij} 满足

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点，} \\ -1 & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点，} \\ 0 & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联，} \end{cases}$$

那么，就称 $\boldsymbol{M}$ 是 D 的关联矩阵。不难发现，流守恒条件就等价于如下等式

$$\boldsymbol{Mf} = 0, \tag{2}$$

其中 0 是零向量。换句话说，基尔霍夫电流定律其实就是方程 (2)。用线性代数的语言说，所有环流的全体实际上就是 $\boldsymbol{M}$ 的零空间（也称核空间），我们不