

通往 纽结之路

刘洋洲

纽结在正式成为数学研究对象之前，本就与我们的生活息息相关，更有着极其深厚的文化历史背景。本文以蜻蜓点水的方式，向读者展示纽结“感性”的一面，试图激发读者的阅读兴趣，尽可能展示纽结理论研究的必要性。事实上，纽结本身就美得无与伦比，对于数学家、艺术家而言，已经无需多言。

1 鞋带、纽结与生命

系鞋带是每天匆忙出门前需要做的事，但正因为如此平常，也许我们很少有机会去停下来思考：全世界系鞋带的方式都统一吗？如果有不同的系鞋带方法，那么哪种更好？甚至在此之前，我们必须回答：好的标准是什么？

我们先来回答最后一个问题。无论我们在鞋孔中如何穿插，整个过程中始终不变的是——鞋带只有两端，并且这两端必定是最终“打结-解开”的关键，毕竟，您也不希望穿着鞋子睡觉。

情形 1 当我们需要解开鞋带时，无论拉鞋带哪一端，只会越拉越紧。这种情况我们称之为“死结”，这无疑是失败的，应当首先排除。



图 1. 死结

情形 2 场景同上，当我们拉鞋带其中一端时，越拉越紧；拉另外一端时，越拉越松。也就是说，只有 50% 的概率鞋带会松开。除非你特意给某一段做了标记，否则情急之下，还是容易拉错。



图 2. 活结 A

情形 3 无论我们拉哪一端，都能解开鞋带。这倒是很方便，不会解错，只是鞋带比情况 2 更容易松开。一旦被人踩到、或是被某物勾住，鞋带 100% 会松开。



图 3. 活结 B

综上，情形 2 与情形 3 我们可以接受，两者各有长短，请读者自己选择。我个人还是比较推崇情形 3，毕竟解鞋带只是一瞬间的事。

事实上，图 1、图 2、图 3 严格来说仍然不能称为纽结，因为即便所谓“死结”，仍然可以解开。那么如果将鞋带两端接在一起，或者，也可以将鞋带两端延伸至无穷远——这样做有很明显的好处，更方便保存、研究所打的结。只需经过这么一点小手术，我们就获得了真正的纽结。

图 4 左帧我们称之为三叶结（trefoil）。其余两图所示纽结显然可以解开，变成一个圆环（请读者验证）。我们把凡是能摆弄成圆环的纽结，都视为一类，数学家称之为平凡结（unknot）。因为它最简单、最平凡，英文直译的话，就是未（un-）打结（knot）的结。



图 4. 左：三叶结；中：平凡纽结 A；右：平凡纽结 B

死结和能解开的结不是一回事，那么三叶结和平凡纽结是否是同一个纽结呢？

请您别着急，在解开这个谜团之前，先请允许我为您掀开纽结帝国那神秘的面纱——一段波澜壮阔的历史，正在向您徐徐展开……

一切都要从人和宇宙的关系说起。

问：为什么宇宙会孕育生命？

答：因为空间是 3 维的¹。

¹ 虽然弦理论预言宇宙是 11 维的，但其他 6 维在微观上可能是以丘-卡拉比流形的方式蜷缩，目前只有时-空维度 (1+3) 是可观测的。

3 维怎么了？有何神奇之处？横向、纵向、竖向，沿三个方向延伸，我们已经习惯了这个世界给予我们的维度自由，与此同时，我们也面临着维度限制。此话怎讲？假如我们生活在艾博特（Edwin A. Abbott）所著的《平面国》（*Flatland*），依照该书的设定：女士是线段，士兵是三角形，贵族是多边形，越接近圆地位越高。

由于只有两个维度，行动将会遇到重重障碍。假如平面上有一个点洞，如果你想把一位线段形态的女士关起来，只需要让其首尾相接，变成一个圆圈，并且套住这个障碍点，她就即刻失去自由了——2 维平面的朋友千万不要这样做。而在 3 维，情况却大不相同：只需这位女士轻轻跃起（甚至抬一抬脚），即刻行动自如，如图 5。

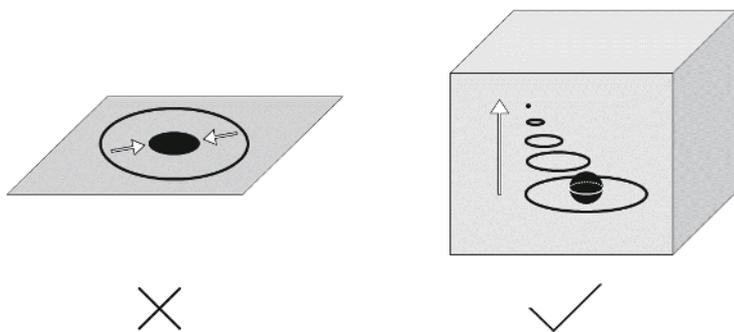


图 5. 黑色点洞在 2 维空间构成障碍，但在 3 维空间不然

您可能觉得我在讲科幻设定；平面国的女士是否自由，和宇宙孕育生命有什么关系？但事实上，这与遗传物质能否顺利进行生命活动，有直接的关系。

生命的密码被写在名为 DNA 的链条上，通过读取链条上的指令，生命进行着有条不紊的活动，所以生命本身也是台图灵机²。然而，即便只是一个单细胞生物，其生命行为也无比复杂，所有的指令都记录在 DNA 上。事实上，如果将一个体细胞内的所有的 DNA 首尾相接展开，竟有 2 米之长！³而这仅仅是一个细胞的信息量。如此之长的链条盘踞在一个小小的细胞核内，DNA 以惊人的方式盘曲错节在固定蛋白上，形成染色体。但是，这些冗长的代码不是简单收纳起来这么简单，还需要时不时翻找出一段基因序列去复制并执行指令，甚至在细胞分裂期，还要解旋复制……

可想而知，小小的细胞内，无数的链条彼此交错，绕开这些障碍，充当信使的 mRNA 从 DNA 那里获得信息，再转录为蛋白质的过程，十分艰辛。但是

² 图灵机，英国数学家图灵（Alan Mathison Turing, 1912–1954）提出的计算机模型。图灵被誉为“人工智能之父”，计算机最高奖项——图灵奖，以他的名字命名。

³ 一个碱基的长度为 0.34 纳米，体细胞内约有 30 亿对碱基，如果把 DNA 双链拆开，约为 2 米。

3 维空间保证了 mRNA 运动的自由度，而不是像平面国被困住的女士。

另外，如果空间是 4 维、5 维或是更高维，这样不是能获得更大的自由吗？诚然，但是在更高的维度，纽结只有一种！也就是说，无论你再怎么努力打结，都是白费功夫，因为在 4 维以上的空间，所有的结都可以解开。但是，在 3 维空间，纽结的种类无穷无尽！也正因为 3 维空间允许纽结存在如此丰富的空间结构，所以生命存在的形式才会如此丰富多彩。

事实上，结、滑结、套索和链环，这些结构在蛋白质数据库中约占 6%。蛋白质中的纽结结构，尽管折叠速率低（因为它们需要额外的步骤来形成复杂的拓扑结构），但即便在没有分子伴侣的帮助下，也可以自发折叠；而蛋白质纽结往往具有极高的稳定性，以及突变进化方面的高保守性。与此同时，其复杂的空间结构有助于形成蛋白质的特定构象，纽结结构往往是特定蛋白合成的中间产物，极大地丰富了合成路径⁴。

如果您不急于了解具体的纽结，那不妨请您随我看看纽结理论发展的历史，其本身如同纽结一样峰回路转。

2 遍地开花的纽结文化

上古结绳记事，后世圣人易之以书契。百官以治，万民以察。

——《周易·系辞》

上一节我们从人和宇宙的关系讲起，本节我们来谈谈纽结与历史文化。

人类未有文字之前，有一段漫长的“结绳记事”的时期。岩石壁画过于笨重，石板刻痕容易毁损，而绳结不但便携，且打结稳固，方便远程通讯。

纽结和汉字数字渊源颇深，甲骨文、金文中的部分文字确实是从结绳中发展而来的。上世纪著名的历史学家、古文学家徐中舒先生在《结绳遗俗考》⁵一文中谈到：“文字有取象于绳形者，或为屈曲之形，或为分股纠合之形，或为结绳之形。”

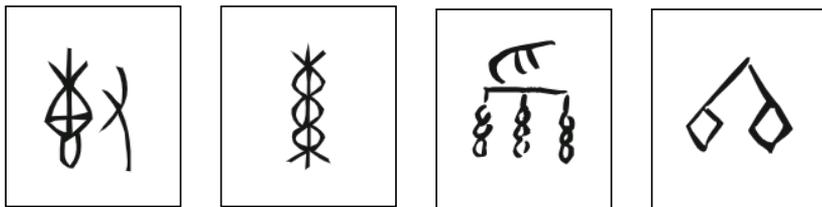


图 6. 以上甲骨文分别表示的汉字为：专、束、系、终

⁴ 感兴趣的读者请阅读：Dabrowski-Tumanski, Pawel, and Joanna I. Sulkowska. "To tie or not to tie? That is the question." *Polymers* 9.9 (2017): 454.

⁵ 徐中舒. 结绳遗俗考, 说文月刊 (第 4 卷合刊本), 1944, pp. 185-188.

这里顺便为“纽结”正名。尽管“扭结”也可，不过依照《说文》：纽，系也。一曰结而可解。按，结而不可解曰缔。古人对事物分类之细致，令人赞叹。按照现代汉语构词的规律，“纽缔”是个不错的组合，但没有纽结听着更响亮。

绳结语言曾是人类重大的发明，即便文字出现之后，结绳记事依旧有着巨大的惯性。结绳记事并非中国独有，世界各个国家民族普遍都有这一时期，如印加文明的奇普（Khipu）⁶，也是一种绳结文字，竟然可以记录历史、诗歌与祭祀。甚至现代仍有部分民族保留着这一远古的文字系统。

有趣的是，许多科幻作品中的外星人，使用着类似于纽结的非线性排列的文字，如华裔美国科幻作家姜峯楠的《你一生的故事》中的七肢桶⁷，人类通过破译他们的文字，从而了解到他们先果后因的奇特思维方式。或许，人类对于纽结的不了情难以释怀，依然潜藏在文明记忆的深处。

结，以传统诗歌意象去理解，给人以难解难分、纠缠不清的感觉。正如南唐后主李煜所吟“剪不断，理还乱”，还有宋代词人张先所云“心似双丝网，中有千千结”，用来描述复杂纷乱的心绪最为恰当。汉语更是有“心结”一词，比喻人难以释怀的执念。既然解不开，那就干脆——“腰中双绮带，梦为同心结”（梁武帝萧衍《有所思》）。结，于是也成为爱情的象征，而少年人也多半容易深陷情网，不能自拔。除了结婚时夫妻双方共执同心结两端，成婚之夕，男左女右共髻束发，成为结发夫妻⁸。中国的月老是婚姻爱情的守护神⁹，据说，他只要将男女二人之足，系之以红线，二人姻缘便已注定。这在数学人眼中极为罗曼蒂克：可见月老是一位拓扑学家，是一个打结的高手。高维的生命是否能轻易改变我们的命运？或许，在月老眼中我们都只是高维时空中的纽结。

纽结也象征智慧，进而引申为吉祥，因为解开难解之结需要非凡的智慧，而非凡的智慧可以渡一切苦厄。佛门有八宝，即法螺、法轮、宝伞、白盖、莲花、宝瓶、金鱼和盘长八件宝物，又称为“八吉祥”。其中盘长又称为“吉祥结”。盘长¹⁰，九曲回肠，自我交织，无始无终，表示智慧通达，回环贯通，以及永恒不灭的智慧。

西方关于纽结的故事也十分丰富。

“谁能解开戈尔迪乌姆结，谁就能称霸亚细亚。”传说公元前334年亚历山大大帝挥军亚细亚，经过佛律基亚时，听闻此言，顿时兴致勃勃。

⁶ 印加与玛雅、阿兹科特并称为“印第安三大古文明”。

⁷ 后改编为科幻电影《降临》。

⁸ 结发夫妻，原指古代刚成年男女结为夫妇，结发指男子二十行冠礼，女子十五行笄礼，以示成年。而后发展出合髻之礼。

⁹ 最早出自唐代李复言的《续玄怪录·定婚店》。

¹⁰ 《藏传佛教神明大全》：“盘长为雍仲之符，为神明与佛在长久永固自然呈现之符，为永恒不灭之象征”。“雍仲”是指“卍”这个符号，象征佛陀。唐武则天规定其读作“万”，意指万福万寿，吉祥如意。