



梅森素数 (一) Mersenne prime

蔡天新

引子 一张 10 万美元的支票

道生一,一生二,二生三,三生万物。

——(东周)老子

2000 年的一个春日,居住在美国汽车城底特律的印度人哈吉拉特瓦拉 (Nayan Hajratwala) 先生收到了总部设在旧金山的电子前沿基金会 (EFF) 一张 5 万美元的奖金支票,因为一年前的 6 月,他找到了第 38 个梅森素数,这也是到那时为止人类发现的最大素数。众所周知,所谓素数或质数是大于 1 不能乘法分解的正整数。例如,最小的 4 个素数是 2、3、5、7,他们也是 10 以内所有的素数。

那个价值 5 万美元的素数是:

$$2^{6972593}-1$$

这也是人类知道的第一个位数超过 100 万的素数,如果把这个素数写成我们熟悉的 10 进制形式的话,它有 2098960 位。

可是,哈吉拉特瓦拉先生并不是一个数学家,他甚至很可能对寻找素数的数学理论一无所知——虽然他赢得了这笔奖金。他是总部设在伦敦的普华永道会计事务所的从业人员,这家会计事务所拥有近 15 万员工,遍布 150 多个国家和地区。哈吉拉特瓦拉先生所做的一切,就是从互联网上下载一个程序。这个程序在他平常不太使用的奔腾 II350 型电脑上悄悄地运行,经过 111 天的计算后,上面所说的梅森素数在 1999 年 6 月的某一天出现了。

九年零两个月以后,即 2008 年 8 月,加利福尼亚大学洛杉矶分校的计算机专家史密斯 (Edson Smith) 找到了第 47 个梅森素数,共 12978189 位。这是人类发现的第一个超过 1000 万位的素数,当然也是当时已知最大的素数,

他因此获得了EFF基金会寄来的一张10万美元的奖金支票，同时他的发现还被纽约的《时代》周刊推选为年度50项科学发明之一。

早在公元前3世纪，古希腊数学家欧几里得便在其名著《几何原本》第9卷中的命题20证明了，素数有无穷多个。笔者愿意相信，梅森素数也会有无穷多个。反正下一张支票，奖金额度为15万美元的支票仍在等待下一位主人，即会开给第一个找到超过一亿位的梅森素数的幸运儿。2024年10月11日，英伟达公司的一位前员工找到第52个梅森素数，共41024320位，这也是迄今人类发现的最大素数，可是离一亿位的奖励要求仍有距离（或许只是一步或两步之遥）。

值得一提的是，此前一年，第50个梅森素数由美国田纳西州联邦快递公司(FedEx)的电气工程师佩斯找到，共23249425位。可能是因为50这个整数的缘故，日本一家叫虹色的小出版社在不到一个月的时间里出版了一本叫《2017年最大的素数》的书，全书共720页，没有任何文字，只有一个数字，那就是第50个梅森素数。此书出版后第4天，首印的1500册图书便销售一空了。

那么，何为梅森素数？谁又是梅森先生呢？

第一章 梅森神父的沙龙

卢瓦尔河谷是孕育法兰西精神的地方。

——（法国）夏尔·戴高乐

1. 美丽的卢瓦尔河谷

1588年9月8日，一个秋高气爽的日子，在巴黎西南卢瓦尔河大区的萨尔特(Sarthe)省，一个男孩降生了，他便是后来的天主教神父马林·梅森(Marin Mersenne)，一个神奇的数学家兼物理学家。梅森的祖辈都是农民，小时候他在故乡的教会学校念书，加入了当地的教会组织。卢瓦尔河是法国的第一大河和母亲河，她最美的一段是中游280公里长的河谷。两岸有许多精致的小山丘，古老的城堡掩映在绿树丛中。萨尔特省因同名的卢瓦尔河支流得名，此河流经的省会勒芒离巴黎的直线距离大约200公里。

卢瓦尔河谷盛产梨和苹果等新鲜蔬果，每到秋天，这里漫山遍野都是紫色的石南花，花丛中长满了野生的蘑菇。还有遐迩闻名的白诗南葡萄酒，既可酿成干型，也可酿成甜型。巴黎人喜欢来这里秋游、打猎或捉野鸭。有一个说法，要完整地领略法兰西风情，需要去两个地方，一是巴黎，二是卢瓦尔河谷。多元文化汇聚的巴黎代表了法兰西浪漫而前卫的一面，而卢瓦尔河谷则是法兰西古朴优雅的后花园。巴黎的美，美在各种文化的撞击和矛盾，而卢瓦尔河谷的美，则美在她的自然、恬静和纯粹。

在萨尔特河汇入之前，卢瓦尔河流经了中央大区的安德尔-卢瓦尔省，安德尔河是卢瓦尔河另一条更大的支流，省名Indre-et-Loire就是把两条河流的



卢瓦尔河畔的蒙梭罗城堡，大仲马写过小说《蒙梭罗夫人》

名字连在一起的，而且是按照字母顺序排列。必须指出的是，安德尔 - 卢瓦尔省是数学家、哲学家笛卡尔 (Rene Descartes) 的故乡，他出生的小镇图赖讷在该省南部边缘，如今已改名笛卡尔镇。

笛卡尔比梅森小八岁，但却曾在同一所学校学习，即拉弗莱什的皇家大亨利学校，又译拉弗莱什公学。拉弗莱什是萨尔特省副省会和第二大城市，卢瓦尔河另一条支流卢瓦河 (Loir) 流经此城。笛卡尔出身贵族，母亲早逝，父亲另娶妻子，他小时候由外祖父母带大，八岁时父亲送他进了这所由国王亨利四世创建的贵族学校。开明的校长见他身体虚弱，却又聪明，便允许他早晨睡懒觉，在床上看书而不必到教室早自修。

1610年5月14日，当亨利四世的马车驶过巴黎的一条街道时，一个激进的天主教徒冲进马车，用匕首刺伤了国王，他于次日去世。按照国王的生前意愿，他的心脏被取出，安葬在皇家大亨利学校，校方挑选了24位成绩优异的学生参与护送，14岁的笛卡尔也在其中。笛卡尔在这所学校学习了八年，除了人文学科，还学习医学、数学和其他自然科学，他后来建立了平面坐标系和解析几何，同时创立了二元论哲学，成为“近代哲学之父”(德国哲学家黑格尔语)。

萨尔特省和南边古称安茹的曼恩 - 卢瓦尔省 (Maine-et-Loire) 均与安德尔 - 卢瓦尔省毗邻。1883年，“法兰西之花”加布里埃·香奈儿出生在曼恩 - 卢瓦尔省卢瓦尔河流经的小城索米尔，她的母亲在贫民院工作并在那儿生下了她，父亲是来自卢瓦尔河源头塞文山的杂货小贩。六岁那年母亲去世，父亲抛弃了她们五兄妹，之后她由姨母抚养成人，几时入读修道院办的学校，并在那儿学会了针线活。17岁那年，香奈儿在巴黎开了一家帽子店，四年以后她开了两家时装店，著名的“香奈儿 (Chanel)”名牌诞生了。1921年，她推出了香奈儿5号香水。

安德尔 - 卢瓦尔省的省会叫图尔，是一座美丽的历史名城，卢瓦尔河穿城而过，安德尔河流经南郊，两河在图尔的西郊汇合。公元732年，信仰伊斯兰教的摩尔人与信仰基督教的法兰克人之间爆发了图尔战役。之前，穆斯林军队

已经横扫中东和北非，越过直布罗陀海峡，占领了整个伊比利亚半岛。结果以逸待劳的法兰克人虽然兵力较少，却以大胜而告终，他们用轻骑兵和手持长矛的步兵击败了拥有中型装甲骑兵的对手，摩尔人被迫退回到比利牛斯山脉以南的西班牙，并最终撤出了欧洲。

图尔战役从图尔一直打到南边的普瓦捷，故又称普瓦捷战役，普瓦捷是普瓦图-夏朗德大区首府和维埃纳省省会，当年笛卡尔从大亨利学校毕业后上的就是普瓦捷大学，他在那儿获得了法学博士学位。这场战争某种程度上对世界格局的形成产生了重要影响，不然的话，全欧洲恐怕都要信奉伊斯兰教，那样是否有后来的文艺复兴、地理大发现、启蒙运动和资产阶级工业革命等就难说了。而法兰克王国经过四代国王统治以后，三兄弟分家，即分成西、东、中法兰克王国，它们后来各自分别形成了法兰西、德意志和意大利。

奥尔良是卢瓦尔河谷名城，中央大区首府和卢瓦雷省省会，法兰西民族英雄贞德的绰号便是“奥尔良少女”，她是英法百年战争的关键人物。贞德出生在乡村，13岁时得到“上主的启示”，要求她带兵收复被英格兰占领的土地。贞德获得查理太子授予的兵权后，于1429年解除“奥尔良之围”，夺回大片失地。不幸翌年她被勃艮第公爵俘获，英格兰人以重金购去，以异端和女巫罪判处火刑，遇害时年仅19岁。英军被逐出法国后，罗马教廷下令重审贞德案，最终于1456年为她平反。1920年，她被追封为圣人。

了解这些史料故事以后，我们不难明白，为何卢瓦尔河谷有那么多城堡和古迹。2000年，从卢瓦雷省的叙利向西到马恩-卢瓦尔省的沙洛那之间的卢瓦尔河谷入选联合国教科文组织名下的世界文化景观遗产，理由是：“卢瓦尔河谷拥有最美丽、最杰出的文化景观，沿岸分布着大量的历史名镇和村庄、雄伟的建筑古迹（城堡），以及几个世纪以来人类开垦的耕地，这是人类和自然环境相互作用、和谐发展的结果。”在这一带生活过的除了笛卡尔，还有拉伯雷、巴尔扎克、乔治桑和普鲁斯特等大作家。

1494年，《巨人传》作者拉伯雷出生在希农，1799年，《人间喜剧》作者巴尔扎克出生在图尔，两地均属于安德尔-卢瓦尔省，他们是笛卡尔的正宗老乡。法国文学史上最负盛名的女作家乔治桑从祖上继承的诺昂庄园也在安德尔-卢瓦尔省，她曾与情人、波兰作曲家肖邦在诺昂生活了七年。考虑到法国本土有13个大区、96个省份，不能不说是一种巧合。拉伯雷说过：“生我养我的，正是卢瓦尔河谷这座法兰西花园。”戴高乐将军也曾说过，“卢瓦尔河谷是孕育法兰西精神的地方”。

1516年，意大利画家达·芬奇应弗朗索瓦一世邀请来到安德尔-卢瓦尔。弗朗索瓦一世聘他为宫廷画师，将其安置在卢瓦尔河南岸昂布瓦斯的庄园，那是瓦卢瓦和波旁两个王朝国王们的行宫。达·芬奇享有丰厚年俸，随心所欲地从事艺术创作或科学研究。三年后的春天，画家病重，他在闻讯赶来探视的国王怀中去世，葬在行宫里的圣于贝尔小教堂。同年，位于昂布瓦斯与奥尔良之间的香波城堡建成，那是卢瓦尔河谷最宏伟的城堡，由弗朗索瓦一世下令修建，据说部分设计灵感来自达·芬奇。半个世纪后，莫里哀的喜剧《贵人迷》在教堂首演并获得成功，不过那已是太阳王路易十四的时代。



《达·芬奇之死》，安格尔作

2. 梅森神父的沙龙

生于养于卢瓦尔河流域，梅森自小聪颖好学，并虔诚地参加教会组织的活动，后来被送到拉弗莱什的皇家大亨利学校研修，在那里他与笛卡尔有一段共同的时光。1611年，23岁的梅森又被推选去巴黎，学习神学和希伯来语。两年以后，他正式成为神父，并留在巴黎。在17世纪的欧洲，对普通人家的父母来说，神父、医生和律师是最希望孩子从事的三大职业。梅森在米尼姆修道会的两座女修道院授课，他强烈地反对炼金术和占星术，努力捍卫科学。32岁那年，梅森开始学习数学和音乐，并以传道的名义在西欧进行广泛持久的旅行，仅意大利就去了15次。

梅森与同代最杰出的同胞科学家德扎尔格、伽桑狄、笛卡尔、费尔马、帕斯卡尔等人交往，并与意大利的伽利略、托里拆利，荷兰的惠更斯等通信，成为伽利略学说坚定的支持者。由于当时没有科学杂志，人们可能毕生研究同一个问题，而相互之间并不知道。梅森通过旅行和通信，把消息及时传递给同道。有一个流传甚广的说法，“告诉梅森一个新发现，意味着全欧洲的人都知道了。”不仅如此，梅森本人也对某些问题进行研究或给出建议。例如，他曾研究过摆线，并建议荷兰人惠更斯利用摆线作为计时器，后者因此研制出摆钟。

梅森享有“声学之父”的美誉，并在音乐理论方面有创造性的贡献。所谓梅森定律是用来描述弦振动的谐波，适用于吉他和钢琴。1635年，他建立了非正式的巴黎科学协会，有140位通讯会员，包括数学家、天文学家和哲学家等，他们来自法国、意大利、荷兰和英格兰等国。梅森与会员们保持着联系，他在巴黎的家是个大房子，定期在家中举办沙龙，帕斯卡尔父子是其中的常客。梅森出版的著作有《科学中的真理》和《宇宙的和谐》等。

帕斯卡尔（Blaise Pascal）比梅森小34岁，两人可谓是忘年交，他的父亲老帕斯卡尔与梅森同龄，是个税务官员。小帕斯卡尔出生在法国中部的多姆山省，四