位数码和、杨辉三角与处处不可导函数

陆 俊

看到这个标题时，你可能会好奇："这三个八竿子打不着的数学对象为什么会放在一起呢？难道它们之间存在某种神秘的联系？"答案是肯定的！

我们先来回忆一下什么是位数码和。随便考虑一个正整数，比如 127 吧，它的个、十、百位上的数字叫做位数码（digit）。我们把这些数码加在一起所得的总和称为这个数字的"位数码和"（digital sum）。数字 127 的位数码和是 1+2+7，也就是 10。类似地，1024 和 2401 的位数码和都等于 7。

亿级		万级				个级				数级
…	亿位	千万位	百万位	十万位	万位	千位	百位	十位	个位	数位
…	亿	千万	百万	十万	万	千	百	十	一（个）	计数单位

数位表（图片取自网络）

上面说的位数码和概念当然是在我们所熟悉的十进制下定义的。但十进制显然不是一个必不可少的前提。很多时候，人们也会采用其他的进位制，比如计算机中通常使用二进制。顺便一提，我们之所以习惯于十进制表达，和人类拥有十根手指有着密不可分的关系。这一点甚至可以追溯到登上陆地的原始祖先那里。如果我们当初只有两根手指，那么采用二进制或许就会变得顺理成章。

进位制与十指（图片取自网络）

因此，我们同样可以毫无困难地在其他进位制下定义位数码和。比如 127 在二进制里写成 1111111。那么它的二进制下的位数码和就是七个 1 相加，也就是 7。又比如，在 3 进制下。127 表达为 11201，此时的位数码和就等于 5。为了讨论方便，我们把一个正整数 n 在 p 进制下的位数码和记成 $s_p(n)$。这样，我们可以写

$$s_{10}(127) = 10,\ s_2(127) = 7,\ s_3(127) = 5, \ldots\ldots$$

如果我们每次都先把 n 写成 p 进制下的表达式然后再求位数码和，计算上往往会比较繁琐。因此我们希望有一个更快捷的计算公式能够直接计算它。幸运的是，这样的公式并不难找。它长成下面的样子：

$$s_p(n) = n-(p-1)\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^l}\right]+\cdots\right).$$

这里面的方括号 $[x]$ 表示不超过非负实数 x 的最大整数，换言之，就是 x 写成小数形式时的整数部分。比如 $[2.3] = 2, [1/3] = 0, [4] = 4$ 等等。公式右边看起来有无限多项求和，但实际上只有有限项是非零的。这是因为一旦方幂 p^l 超过 n，我们就有$\left[\frac{n}{p^l}\right] = 0$。

我们依旧拿 127 做实验。在 p =10 的情况下，

$$\left[\frac{127}{10}\right] = 12, \left[\frac{127}{100}\right] = 1, \left[\frac{127}{1000}\right] = \left[\frac{127}{10000}\right] = \cdots = 0\,.$$

因此

$$s_{10}(127) = 127-(10-1)(12+1+0+0+\cdots) = 127-9\times 13 = 10.$$

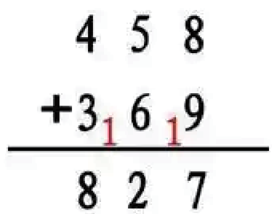
这里顺便补充一下：在小学数学课里，我们曾学过如何利用位数码和来判

断一个数字是不是 9 的倍数——看它的位数码和是不是被 9 整除。这个性质实际上来自于上面公式的一个简单推论，即 n 和 $s_p(n)$ 除以 $p-1$ 后总有相同的余数。

整数部分 $[x]$ 有一个很简单的不等式性质，即 $[x]+[y] \le [x+y]$。把它应用到上面的位数码和计算公式里，我们立刻就能得到如下的加法不等式：

$$s_p(n) + s_p(m) \ge s_p(n+m).$$

这个不等式的等号成立当且仅当 n 和 m 在做加法竖式运算时不发生进位（当然是在 p 进制下）。比如，在十进制下，458+369 在加法竖式运算中发生两次进位。



竖式计算（图片取自网络）

因此

$$s_{10}(458) + s_{10}(369) = (4+5+8) + (3+6+9) = 35 > s_{10}(827) = 8+2+7 = 17.$$

又比如，加法 8+7=15 在二进制下表为 1000+11=1111，不发生进位，因而

$$s_2(8) + s_2(7) = (1+0+0+0) + (1+1+1) = 4=1+1+1+1 = s_2(15).$$

但是在十进制下，8+7 出现一次进位，所以 $s_{10}(8) + s_{10}(7) = 15 > s_{10}(15) = 6$.

如果更仔细地分析上述不等式，你会发现这个不等式左右两端的差值实际上和加法竖式运算中发生的进位次数有关。这里我们不再详细展开了。此外，稍微借助一点竞赛技巧，我们还能得到位数码和乘法不等式

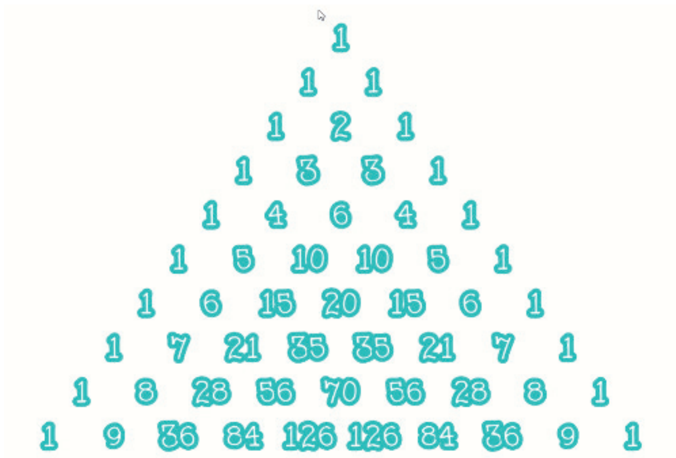
$$s_p(n) \cdot s_p(m) \ge s_p(n \cdot m).$$

有兴趣的读者可以自己尝试证明一下。

那么，位数码和是怎么与杨辉三角发生联系的呢？且听我慢慢道来。大家应该都比较熟悉杨辉三角（也称贾宪三角）。它是由一堆正整数排列而成的三角形。这个三角形两侧的数字都是 1 并且满足这样的规律：同一行内相邻的两个数字之和恰好等于它们正下方的数字。你可以按照这一规律填出杨辉三角中所有的数字。

根据组合学的结论，杨辉三角里的数字实际上就是组合数（也称二项式系数）

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdots 2\cdot 1}.$$



杨辉三角（图片取自网络）

它的实际意义就是指从 n 个球里挑出 个的所有可能情形数。上述定义中的

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

被称为阶乘。它的实际意义就是指将 n 个编有不同号码的球排队的所有可能的排列数。

一个饶有趣味的问题是：在杨辉三角中的每一行内，含有多少个奇数？为了叙述方便，我们把杨辉三角尖顶所在的行编为第 0 行；由两个 1 组成的那一行编为第 1 行；依次类推，第 n 行的数字从左至右依次是

$$C_n^0, C_n^1, \cdots C_n^{n-1}, C_n^n.$$

我们把第 n 行中出现的奇数个数记为 $b(n)$。不妨来算一下前面几个 $b(n)$ 分别是多少？它们依次是

$$1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8, \ldots$$

这看起来像是个找数字规律的智力测试题。你也许能立刻猜到一个可能的规律：每个 $b(n)$ 都是 2 的方幂！确实猜对了。待会儿我们再来解释原因。现在我们把上面的数列写成 2 的方幂，并把指数挑出来，重新写成一个新序列，换句话说，我们考虑 $\log_2 b(n)$ 构成的序列：

$$0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3\ldots.$$

这个数列看起来似乎不再有显而易见的规律了。但是请想一想，我们之前考虑的位数码和会不会与它发生关系呢？我们来观察一下二进制下的自然数序列 0, 1, 2, 3,.... 对应的位数码和 $s_2(n)$ 是什么样的。它们依次为

$$0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3\ldots.$$

EureKa！这两个序列竟然是一致的！也就是说我们有 $b(n) = 2^{s_2(n)}$.