2020 年 2 月 计 算 数 学 第 42 卷第 1 期
Feb., 2020 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.42, No.1

中立型随机延迟微分方程分裂步 θ 方法的强收敛性[*1)]

彭 捷 代新杰 肖爱国 卜玮平
(湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105)

摘 要

中立型随机延迟微分方程常出现在一些科学技术和工程领域中. 本文在漂移系数和扩散系数关于非延迟项满足全局 Lipschitz 条件, 关于延迟项满足多项式增长条件以及中立项满足多项式增长条件下, 证明了分裂步 θ 方法对于中立型随机延迟微分方程的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 数值实验也验证了这一理论结果.

关键词: 中立型随机延迟微分方程; 分裂步 θ 方法; 强收敛; 多项式增长

MR (2010) 主题分类: 34K40, 34K50, 60H35, 65L20

1. 引 言

作为一类重要的随机微分方程, 中立型随机延迟微分方程 (NSDDEs) 不仅仅依赖于现在和过去的状态, 还依赖于过去一段时间内的变化率. 该类方程广泛地出现于生物学、化工、神经网络、空气动力学和工程技术等领域中 [1–4].

本文主要考虑以下中立型随机延迟微分方程:

$$d[x(t)-N(x(t-\tau))]=f(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}B(t),\quad t\in[0,T]. \tag{1.1}$$

当 $t\in[-\tau,0]$ 时, 初始值 $x(t)=\varphi(t)\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\ R^n)$. 这里 T 和 τ 为正常数,

$$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times d},\quad N:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

都是 Borel 可测的实值函数, $B(t)$ 是 d- 维布朗运动.

由于大部分的 NSDDEs 都很难得到真解的表达式, 所以研究其数值方法就显得尤为重要. 大部分数值分析研究工作都是在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件 [5–7] 下进行的, 然而这两个条件是比较苛刻的, 许多 NSDDEs 模型并不满足这些条件, 所以有必要在更一般的条件下进行研究. 在数值分析中, 收敛性理论一直是研究的中心问题之一. Zhang 和 Gan [5] 在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件下证明了求解 NSDDEs 的一类漂移隐式格式的强收敛性. Ji 和 Yuan [8] 对于 NSDDEs 在非全局 Lipschitz 条件下, 研究了驯服 Euler 方法的强收敛性. Gan 等人 [9] 在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件下研究了针对非线性 NSDDEs 的随机 θ 方法, 并证明了其均方收敛阶为 $\frac{1}{2}$. Milošević [10] 对于高度非线性的 NSDDEs 在 Khasminskii 型条

[*] 2018 年 2 月 8 日收到.
[1)] 基金项目: 国家自然科学基金 (11671343, 11601460), 湖南省自然科学基金 (2018JJ3491) 和湖南省研究生科研创新重点项目 (CX20190420) 资助.

件下研究了 Euler-Maruyama (EM) 方法的依概率收敛性. Milošević [11] 对于 NSDDEs 在非线性增长的条件下研究了向后 EM 方法的依概率收敛性. Ji 等人 [12] 在漂移系数和扩散系数关于非延迟项满足全局 Lipschitz 条件, 关于延迟项满足多项式增长条件以及中立项满足多项式增长条件下, 证明了 NSDDEs 的 EM 方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. Yan 等人 [13] 研究了 NSDDEs 的分裂步 θ 方法, 这里的漂移系数和扩散系数对于非延迟项都满足全局 Lipschitz 条件, 而对延迟项都是高度非线性, 且中立项满足压缩条件. Tan 和 Yuan [14] 在与 [13] 类似的条件下讨论了 θ 方法的强收敛性; 但他们的中立项满足更一般的多项式增长条件. 对于中立型随机泛函微分方程 (NSFDEs), Wu 和 Mao [15] 在漂移系数和扩散系数都满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件以及中立项满足压缩映射条件下, 研究了对于 NSFDEs, EM 方法的强收敛理论. Jiang 等人 [16] 在漂移系数和扩散系数满足全局 Lipschitz 条件以及中立项满足压缩映射条件下, 证明了对于 NSFDEs, EM 方法是 p 阶矩强收敛的. Zhou 和 Fang [17] 在漂移系数和扩散系数都满足局部 Lipschitz 条件和多项式增长条件以及中立项满足压缩映射条件下, 证明了对于 NSFDEs, EM 方法是依概率收敛的. 有关 NSDDEs 稳定性分析的研究成果, 可参考文献 [18-23].

分裂步 θ (简称 SST) 方法是一类求解随机微分方程常用的数值方法. 目前已有 3 种不同格式的 SST 方法 [6, 20, 24] 被研究, 其中, 由 Ding 等人 [6] 提出的用于求解随机微分方程的 SST 方法为:

$$\begin{cases} y_k = z_k + \theta f(y_k)\Delta + (1-\theta) f(z_k)\Delta, \\ z_{k+1} = y_k + g(y_k)\Delta B_k, \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $\theta \in [0,1]$, 当 $k = -m,\ -m+1,\ \cdots,\ 0$ 时, $z_k = y_k = \varphi(k\Delta)$, $\Delta B_k = B((k+1)\Delta) - B(k\Delta)$ 表示布朗运动增量, 进一步, 他们证明了此方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 当漂移函数和扩散函数关于延迟项和非延迟项均满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件时, Cao 等人 [7] 证明了该方法求解随机延迟微分方程 (SDDEs) 是均方收敛的. 然而, 该方法目前还没有被应用于求解 NSDDEs, 这就是本文的出发点. 为了表明该方法适用于求解更一般的问题, 本文将考虑比线性增长条件更一般的多项式增长条件.

本文结构如下: 第二节列出有关漂移项、扩散项和中立项的假设条件; 第三节证明初值问题 (1.1) 的真解和应用 SST 方法 (2.13a-2.13b) 求解该问题的数值解的 p 阶矩有界性; 第四节给出该方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$ 的详细证明; 第五节通过四个不同情形的数值实验进一步验证理论结果的正确性; 最后一节是本文的工作总结与展望.

2. 预备知识

令 $(\Omega, \mathcal{F}_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 为一个带有常规 σ- 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间, $B(t)$ 是定义在该空间上 $\mathcal{F}_t$- 可测的布朗运动. 为了确保方程 (1.1) 解的存在唯一性以及研究其数值方法的强收敛性, 引入函数 $V_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都存在正常数 K_i 和 q_i 使得

$$0 \leq V_i(x,y) \leq K_i(1 + |x|^{q_i} + |y|^{q_i}), \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.1}$$

成立. 进一步假设漂移项 $f(x,y)$, 扩散项 $g(x,y)$ 以及中立项 $N(x)$ 分别满足以下假设条件:

假设 2.1 [13,14]. 对任意的 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^n$, 存在正常数 $L_1,\ L_2$ 使得

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq L_1|x_1 - x_2| + V_1(y_1,y_2)|y_1 - y_2| \tag{2.2}$$

和

$$|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)|\le L_2|x_1-x_2|+V_2(y_1,y_2)|y_1-y_2| \tag{2.3}$$

成立.

假设 2.2 [14]. 对任意的 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|N(x)-N(y)|\le V_3(x,y)|x-y| \tag{2.4}$$

成立, 并且 $N(0)$ 有界.

注 2.1. 对于假设 2.2, 文献 [14] 要求 $N(0)=0$, 而本文放宽了此条件, 仅要求 $N(0)$ 有界.

注 2.2. 由假设 2.1, 可得

$$\begin{aligned}|f(x,y)|^2&\le 2|f(x,y)-f(0,0)|^2+2|f(0,0)|^2\\&\le 2(L_1|x|+V_1(y,0)|y|)^2+2|f(0,0)|^2\\&\le 4L_1^2|x|^2+4K_1^2(1+|y|^{q_1})^2|y|^2+2|f(0,0)|^2\\&\le 4L_1^2|x|^2+8K_1^2(1+|y|^{2q_1})|y|^2+2|f(0,0)|^2\\&\le 4L_1^2|x|^2+8K_1^2(|y|^2+|y|^{2(q_1+1)})+2|f(0,0)|^2,\end{aligned} \tag{2.5}$$

类似可得

$$|g(x,y)|^2\le 4L_2^2|x|^2+8K_2^2(|y|^2+|y|^{2(q_2+1)})+2|g(0,0)|^2. \tag{2.6}$$

令 $\bar{C}=\max\{4L_1^2,\ 8K_1^2,\ 4L_2^2,\ 8K_2^2,\ 2|f(0,0)|^2,\ 2|g(0,0)|^2\}$, 则

$$|f(x,y)|^2\le\bar{C}(1+|x|^2+|y|^2+|y|^{2(q_1+1)}), \tag{2.7}$$

$$|g(x,y)|^2\le\bar{C}(1+|x|^2+|y|^2+|y|^{2(q_2+1)}). \tag{2.8}$$

由假设 2.2, 可得

$$\begin{aligned}|N(x)|^2&\le 2|N(x)-N(0)|^2+2|N(0)|^2\\&\le 2V_3^2(x,0)|x|^2+2|N(0)|^2\\&\le 2K_3^2(1+|x|^{q_3})^2|x|^2+2|N(0)|^2\\&\le 4K_3^2(1+|x|^{2q_3})|x|^2+2|N(0)|^2\\&\le 4K_3^2(|x|^2+|x|^{2(q_3+1)})+2|N(0)|^2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

令 $K=\max\{4K_3^2,\ 2|N(0)|^2\}$, 则

$$|N(x)|^2\le K(1+|x|^2+|x|^{2(q_3+1)}). \tag{2.10}$$

综上所述, 令 $\gamma=\max\{q_1+1,\ q_2+1,\ q_3+1\}$, 则

$$|f(x,y)|^2\vee|g(x,y)|^2\le\bar{C}(1+|x|^2+|y|^2+|y|^{2\gamma}), \tag{2.11}$$

$$|N(x)|^2\le K(1+|x|^2+|x|^{2\gamma}). \tag{2.12}$$

其中 $\vee$ 表示两者中取最大者.

现应用 Ding 等人 [6] 的 SST 格式, 用于求解初值问题 (1.1). 对任给的时间 $T>0$, 为了简便, 不妨假设步长 $\Delta=\frac{\tau}{m}$, 其中 m 是正整数, 且 $M=m[\frac{T}{\tau}]$, 这里 $[a]$ 是 a 的取整, 求解 NSDDEs (1.1) 的 SST 方法为 ($\theta\in[0,1]$) :

$$\begin{cases} y_k-N(y_{k-m})=z_k-N(z_{k-m})+\theta f(y_k,y_{k-m})\Delta+(1-\theta)f(z_k,z_{k-m})\Delta, & (2.13\text{a})\\ z_{k+1}-N(z_{k+1-m})=y_k-N(y_{k-m})+g(y_k,y_{k-m})\Delta B_k, & (2.13\text{b})\end{cases}$$

这里 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$, $\Delta B_k=B((k+1)\Delta)-B(k\Delta)$ 表示布朗运动增量. 另外, 当 $k=-m,\ -m+1,\ \cdots,\ 0$ 时, $z_k=y_k=\varphi(k\Delta)$.

注 2.3. 当 $\theta=1$ 时, SST 方法可以退化为分裂步向后 Euler 方法. 不难看出, 当 $\theta\in(0,1]$ 时, 格式 (2.13a) 是半隐式的. 因此, 为了保证这个数值格式是有意义的, 我们限定步长 Δ 满足 $\theta L_1\Delta<1$, 使得隐式方程

$$y=z+\theta\Delta f(y,\bar{y})$$

对任意的 $\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ 有唯一解 $y=F_{\theta,\Delta}(z,\bar{y})$ (参见 [25]). 当 $\theta=0$ 时, $\theta L_1\Delta<1$ 对任意的 $\Delta>0$ 恒成立. 因此我们定义

$$\underline{\Delta}=\begin{cases}\infty, & \theta=0,\\ \dfrac{1}{\theta L_1}, & 0<\theta\leq 1.\end{cases} \tag{2.14}$$

3. p 阶矩有界性估计

为了研究 SST 方法 (2.13a-2.13b) 的强收敛性, 本节将讨论初值问题 (1.1) 的真解及其数值解的 p 阶矩有界性. 在本文中, C 表示一个正常数, 但在不同位置它的值可能不同.

定理 3.1. 如果假设 2.1 和假设 2.2 成立, 那么方程 (1.1) 存在唯一的全局解 $x(t)$, 且下面估计式

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T}|\,x(t)\,|^p\,\big]\leq C(\varphi,p,T) \tag{3.1}$$

对任意的 $p\geq 2,\ T>0$ 成立, 其中 $C(\varphi,p,T)$ 是只依赖于 $\varphi,\ p$ 和 T 的正常数.

证明. 注意到 f 和 g 都满足局部 Lipchitz 条件, 所以方程 (1.1) 存在唯一的局部解 [1]. 为了证明在区间 $[0,T]$ 上局部解就是全局解, 我们只需要证明对于任意的 $T>0$, 不等式 (3.1) 成立即可. 由 Itô 公式和基本不等式可得

$$\begin{aligned}
&|x(t)-N(x(t-\tau))|^2\\
=&|x(0)-N(x(-\tau))|^2+\int_0^t 2(x(s)-N(x(s-\tau)))^T f(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t|g(x(s),x(s-\tau))|^2\mathrm{d}s+\int_0^t 2(x(s)-N(x(s-\tau)))^T g(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}B(s)\\
\leq&|x(0)-N(x(-\tau))|^2+\int_0^t|x(s)-N(x(s-\tau))|^2ds+\int_0^t|f(x(s),x(s-\tau))|^2\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t|g(x(s),x(s-\tau))|^2\mathrm{d}s+\int_0^t 2(x(s)-N(x(s-\tau)))^T g(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}B(s),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

将上式两边同时 $p\ (\geq 1)$ 次方后, 取确界和期望可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\big]\\
\le&5^{p-1}\Big\{C+C\int_0^t\mathbb{E}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+C\int_0^t\mathbb{E}|f(x(s),x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s+C\int_0^t\mathbb{E}|g(x(s),x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}(\int_0^s 2(x(r)-x(r-\tau))^T g(x(r),x(r-\tau))\mathrm{d}B(r))^p\big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 [1] 和 Young 不等式 [26], 对任意的 $\varepsilon>0$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}(\int_0^s 2(x(r)-N(x(r-\tau)))^T g(x(r),x(r-\tau))\mathrm{d}B(r))^p\big]\\
\le&C_p\mathbb{E}[\int_0^t 4(|x(s)-N(x(s-\tau))|^2|g(x(s),x(s-\tau))|^2)\mathrm{d}s]^{\frac{p}{2}}\\
\le&\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\big]+\frac{\varepsilon}{2}C_p^2 4^p\mathbb{E}(\int_0^t|g(x(s),x(s-\tau))|^2\mathrm{d}s)^p,
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

这里

$$
C_p=\begin{cases}(\frac{32}{p})^{\frac{p}{2}}, & 1\le p<2,\\ 4, & p=2,\\ [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2}, & p>2.\end{cases}\tag{3.5}
$$

联合 (2.11), (2.12), (3.3) 和 (3.4), 令 $\varepsilon=5^{p-1}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\big]\\
\le&C+C\int_0^t\mathbb{E}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+C\int_0^t\mathbb{E}|f(x(s),x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s+C\int_0^t\mathbb{E}|g(x(s),x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s\\
\le&C+C\int_0^t\mathbb{E}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+C\mathbb{E}\int_0^t[1+|x(s)|^{2p}+|x(s-\tau)|^{2p}+|x(s-\tau)|^{2p\gamma}]\mathrm{d}s\\
\le&C+C\int_0^t\mathbb{E}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\mathrm{d}s+C\int_0^t[\mathbb{E}|x(s-\tau)|^{2p\gamma}]\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

这里使用了不等式

$$
\begin{aligned}
|x(s)|^{2p}\le&2^{2p-1}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}+2^{2p-1}|N(x(s-\tau))|^{2p}\\
\le&2^{2p-1}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}+2^{2p-1}3^{p-1}K^p(1+|x(s-\tau)|^{2p}+|x(s-\tau)|^{2p\gamma})
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

和

$$
|x(s-\tau)|^{2p}\le 1+|x(s-\tau)|^{2p\gamma}.\tag{3.8}
$$

利用连续型的 Gronwall 不等式 [1], 对任意的 $t\in[0,T]$ 和 $p\geq 1$,

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{2p}\big]\leq C\Big\{1+\int_0^t[\mathbb{E}|x(s-\tau)|^{2p\gamma}]\mathrm{d}s\Big\}. \tag{3.9}$$

利用文献 [13,27,28] 类似的证明方法, 令

$$p_i=([T/\tau]+2-i)p\gamma^{[T/\tau]+1-i},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ [T/\tau]+1.$$

进一步, 由 $\gamma\geq 1$ 和 $p\geq 2$, 易知

$$p_i\geq 2,\quad p_{i+1}\gamma<p_i,\quad p_{[T/\tau]+1}=p,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ [T/\tau].$$

通过 (3.9) 和 $\varphi(t)\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, 可得

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq\tau}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{p_1}\big]\leq C\big\{1+\int_0^\tau\mathbb{E}|x(s-\tau)|^{p_1\gamma}\mathrm{d}s\big\}\leq C, \tag{3.10}$$

和 $\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq\tau}|x(s)|^{p_1}\big]\leq C\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq\tau}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{p_1}\big]+C\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq\tau}|N(x(s-\tau))|^{p_1}\big]\leq C$. 联合 (3.10) 和 Lyapunov 不等式 [3] 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq 2\tau}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{p_2}\big]&\leq C\Big\{1+\int_0^{2\tau}\mathbb{E}|x(s-\tau)|^{p_2\gamma}ds\Big\}\\&\leq C\Big\{1+\int_0^{\tau}(\mathbb{E}|x(s-\tau)|^{p_1})^{\frac{p_2\gamma}{p_1}}ds\Big\}\\&\leq C,\end{aligned} \tag{3.11}$$

故 $\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq 2\tau}|x(s)|^{p_2}\big]\leq C\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq 2\tau}|x(s)-N(x(s-\tau))|^{p_2}\big]+C\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq 2\tau}|N(x(s-\tau))|^{p_2}\big]\leq C$, 重复该过程即可证明此定理. □

定理 3.2. 如果假设 2.1 和假设 2.2 都成立, 且 $0<\Delta<\min\{\bar{\Delta},\ \underline{\Delta}\}$, 则对任意的 $p\geq 2$, 存在一个不依赖 Δ 的常数 $C=C(p,T)>0$ 使得

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq k\Delta\leq T}|\ z_k\ |^p\ \big]\leq C,$$

和

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq k\Delta\leq T}|\ y_k\ |^p\ \big]\leq C$$

成立, 其中 $\underline{\Delta}$ 由 (2.14) 给出, $\bar{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{6\bar{C}}\theta}$.

证明. 将 (2.13b) 两边平方, 可推出

$$\begin{aligned}&|z_{k+1}-N(z_{k+1-m})|^2\\=&|z_k-N(z_{k-m})|^2+\theta^2\Delta^2|f(y_k,y_{k-m})|^2+(1-\theta)^2\Delta^2|f(z_k,z_{k-m})|^2+|g(y_k,y_{k-m})\Delta B_k|^2\\&+2\Delta\theta(z_k-N(z_{k-m}))^Tf(y_k,y_{k-m})+2\Delta(1-\theta)(z_k-N(z_{k-m}))^Tf(z_k,z_{k-m})\\&+2\theta(1-\theta)\Delta^2f(y_k,y_{k-m})^Tf(z_k,z_{k-m})+2(z_k-N(z_{k-m}))^Tg(y_k,y_{k-m})\Delta B_k\\&+2\theta\Delta f^T(y_k,y_{k-m})g(y_k,y_{k-m})\Delta B_k+2(1-\theta)\Delta f^T(z_k,z_{k-m})g(y_k,y_{k-m})\Delta B_k.\end{aligned} \tag{3.12}$$

将 $z_k - N(z_{k-m}) = y_k - N(y_{k-m}) - \theta f(y_k, y_{k-m})\Delta - (1-\theta) f(z_k, z_{k-m})\Delta$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
&|z_{k+1} - N(z_{k+1-m})|^2 \\
=&|z_k - N(z_{k-m})|^2 - \theta^2\Delta^2|f(y_k, y_{k-m})|^2 - (1-\theta)^2\Delta^2|f(z_k, z_{k-m})|^2 + |g(y_k, y_{k-m})\Delta B_k|^2 \\
&+ 2\Delta\theta(y_k - N(y_{k-m}))^T f(y_k, y_{k-m}) - 2\Delta^2\theta(1-\theta) f^T(z_k, z_{k-m}) f(y_k, y_{k-m}) \\
&+ 2\Delta(1-\theta)(y_k - N(y_{k-m}))^T f(z_k, z_{k-m}) + 2(y_k - N(y_{k-m}))^T g(y_k, y_{k-m})\Delta B_k.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

由基本不等式可得

$$\begin{aligned}
&|z_{k+1} - N(z_{k+1-m})|^2 \\
\le&|z_k - N(z_{k-m})|^2 + |g(y_k, y_{k-m})\Delta B_k|^2 + \Delta\theta|y_k - N(y_{k-m})|^2 + \Delta\theta|f(y_k, y_{k-m})|^2 \\
&+ \Delta^2\theta(1-\theta)|f(z_k, z_{k-m})|^2 + \Delta^2\theta(1-\theta)|f(y_k, y_{k-m})|^2 + \Delta(1-\theta)|y_k - N(y_{k-m})|^2 \\
&+ \Delta(1-\theta)|f(z_k, z_{k-m})|^2 + 2(y_k - N(y_{k-m}))^T g(y_k, y_{k-m})\Delta B_k \\
\le&C + \Delta\sum_{i=0}^{k}|y_i - N(y_{i-m})|^2 + C\Delta\sum_{i=0}^{k}|f(y_i, y_{i-m})|^2 + C\Delta\sum_{i=0}^{k}|f(z_i, z_{i-m})|^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{k}|g(y_i, y_{i-m})\Delta B_i|^2 + 2\sum_{i=0}^{k}(y_i - N(y_{i-m}))^T g(y_i, y_{i-m})\Delta B_i.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

将上式两边同时 p 次方, 整理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6^{p-1}}|z_{k+1} - N(z_{k+1-m})|^{2p} \\
\le&C + \Delta^p(\sum_{i=0}^{k}|y_i - N(y_{i-m})|^2)^p + C\Delta^p(\sum_{i=0}^{k}|f(y_i, y_{i-m})|^2)^p + C\Delta^p(\sum_{i=0}^{k}|f(z_i, z_{i-m})|^2)^p \\
&+ (\sum_{i=0}^{k}|g(y_i, y_{i-m})\Delta B_i|^2)^p + 2^p[\sum_{i=0}^{k}(y_i - N(y_{i-m}))^T g(y_i, y_{i-m})\Delta B_i]^p.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

对任意的 $0 \le l \le M$, 不难得到

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}(\sum_{i=0}^{k}|y_i - N(y_{i-m})|^2)^p\big] \le M^{p-1}\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|y_i - N(y_{i-m})|^{2p}\big], \tag{3.16}$$

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}(\sum_{i=0}^{k}|f(y_i, y_{i-m})|^2)^p\big] \le M^{p-1}\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|f(y_i, y_{i-m})|^{2p}\big], \tag{3.17}$$

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}(\sum_{i=0}^{k}|f(z_i, z_{i-m})|^2)^p\big] \le M^{p-1}\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|f(z_i, z_{i-m})|^{2p}\big]. \tag{3.18}$$

利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Hölder 不等式和基本不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}(\sum_{i=0}^{k}|g(y_i,y_{i-m})\Delta B_i|^2)^p\big]\\
\le& M^{p-1}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}\sum_{i=0}^{k}|g(y_i,y_{i-m})\Delta B_i|^{2p}\big]\\
=& M^{p-1}\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|g(y_i,y_{i-m})\Delta B_i|^{2p}\big]\\
=& M^{p-1}\sum_{i=0}^{l}(\mathbb{E}|g(y_i,y_{i-m})|^{2p}\Delta^p)\\
\le& C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|g(y_i,y_{i-m})|^{2p},
\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}(\sum_{i=0}^{k}(y_i-N(y_{i-m}))^Tg(y_i,y_{i-m})\Delta B_i)^p\big]\\
\le& C_p\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|y_i-N(y_{i-m})|^2|g(y_i,y_{i-m})\Delta B_i|^2\big]^{\frac{p}{2}}\\
\le& C_p\Delta^{\frac{p}{2}}l^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}|y_i-N(y_{i-m})|^p|g(y_i,y_{i-m})|^p\big]\\
\le& C\Delta\mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{l}(|y_i-N(y_{i-m})|^{2p}+|g(y_i,y_{i-m})|^{2p})\big].
\end{aligned}\tag{3.20}$$

联合 (3.15)-(3.20), 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}|z_{k+1}-N(z_{k+1-m})|^{2p}\big]\\
\le& C+C\Delta\big[\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|y_i-N(y_{i-m})|^{2p}+\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|f(y_i,y_{i-m})|^{2p}\\
&+\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|f(z_i,z_{i-m})|^{2p}+\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|g(y_i,y_{i-m})|^{2p}\big].
\end{aligned}\tag{3.21}$$

将 (2.13a) 两边平方, 可得

$$\begin{aligned}
&|y_k-N(y_{k-m})|^2\\
\le& 3(|z_k-N(z_{k-m})|^2+\theta^2\Delta^2|f(y_k,y_{k-m})|^2+(1-\theta)^2\Delta^2|f(z_k,z_{k-m})|^2)\\
\le& 3|z_k-N(z_{k-m})|^2+3\theta^2\Delta^2\bar{C}(1+|y_k|^2+|y_{k-m}|^2+|y_{k-m}|^{2\gamma})\\
&+3(1-\theta)^2\Delta^2\bar{C}(1+|z_k|^2+|z_{k-m}|^2+|z_{k-m}|^{2\gamma})\\
\le& 3|z_k-N(z_{k-m})|^2\\
&+3\theta^2\Delta^2\bar{C}(1+2K+2|y_k-N(y_{k-m})|^2+(2K+1)|y_{k-m}|^2+(2K+1)|y_{k-m}|^{2\gamma})\\
&+3(1-\theta)^2\Delta^2\bar{C}(1+2K+2|z_k-N(z_{k-m})|^2+(2K+1)|z_{k-m}|^2+(2K+1)|z_{k-m}|^{2\gamma})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 3|z_k - N(z_{k-m})|^2 + 3\theta^2\Delta^2\bar{C}(2+4K+2|y_k - N(y_{k-m})|^2 + (4K+2)|y_{k-m}|^{2\gamma}) \\
&\quad + 3(1-\theta)^2\Delta^2\bar{C}(2+4K+2|z_k - N(z_{k-m})|^2 + (4K+2)|z_{k-m}|^{2\gamma}) \\
&\le 6\theta^2\Delta^2\bar{C}|y_k - N(y_{k-m})|^2 + (3+6(1-\theta)^2\Delta^2\bar{C})|z_k - N(z_{k-m})|^2 \\
&\quad + 3(4K+2)\Delta^2\bar{C}[\theta^2(1+|y_{k-m}|^{2\gamma}) + (1-\theta)^2(1+|z_{k-m}|^{2\gamma})],
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

这里使用了以下不等式

$$
\begin{aligned}
&|y_k|^2 \le 2|y_k - N(y_{k-m})|^2 + 2|N(y_{k-m})|^2 \le 2|y_k - N(y_{k-m})|^2 + 2K(1+|y_{k-m}|^2 + |y_{k-m}|^{2\gamma}), \\
&|z_k|^2 \le 2|z_k - N(z_{k-m})|^2 + 2|N(z_{k-m})|^2 \le 2|z_k - N(z_{k-m})|^2 + 2K(1+|z_{k-m}|^2 + |z_{k-m}|^{2\gamma}), \\
&|y_{k-m}|^2 \le 1 + |y_{k-m}|^{2\gamma}, \qquad |z_{k-m}|^2 \le 1 + |z_{k-m}|^{2\gamma}.
\end{aligned}
$$

整理 (3.22) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&|y_k - N(y_{k-m})|^2 \\
\le &\frac{3+6(1-\theta)^2\Delta^2\bar{C}}{1-6\theta^2\Delta^2\bar{C}}|z_k - N(z_{k-m})|^2 \\
&+ \frac{3(4K+2)\Delta^2\bar{C}}{1-6\theta^2\Delta^2\bar{C}}[\theta^2(1+|y_{k-m}|^{2\gamma}) + (1-\theta)^2(1+|z_{k-m}|^{2\gamma})],
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

即

$$
|y_k - N(y_{k-m})|^2 \le C|z_k - N(z_{k-m})|^2 + C\Delta|y_{k-m}|^{2\gamma} + C\Delta|z_{k-m}|^{2\gamma} + C. \tag{3.24}
$$

由 (2.13a) 式, 得

$$
z_k - N(z_{k-m}) = y_k - N(y_{k-m}) - \theta f(y_k, y_{k-m})\Delta - (1-\theta)f(z_k, z_{k-m})\Delta.
$$

同理可证

$$
|z_k - N(z_{k-m})|^2 \le C|y_k - N(y_{k-m})|^2 + C\Delta|y_{k-m}|^{2\gamma} + C\Delta|z_{k-m}|^{2\gamma} + C. \tag{3.25}
$$

分别在不等式 (3.24) 和 (3.25) 的两边同时 p 次方, 可得

$$
|y_k - N(y_{k-m})|^{2p} \le C|z_k - N(z_{k-m})|^{2p} + C\Delta|y_{k-m}|^{2p\gamma} + C\Delta|z_{k-m}|^{2p\gamma} + C, \tag{3.26}
$$

$$
|z_k - N(z_{k-m})|^{2p} \le C|y_k - N(y_{k-m})|^{2p} + C\Delta|y_{k-m}|^{2p\gamma} + C\Delta|z_{k-m}|^{2p\gamma} + C. \tag{3.27}
$$

联合不等式 (3.21), (3.26) 和 (3.27), 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l+1}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p}\big] \\
\le &C + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}(\sup_{0\le k\le i}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p}) + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|f(y_i, y_{i-m})|^{2p} \\
&+ C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|f(z_i, z_{i-m})|^{2p} + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}|g(y_i, y_{i-m})|^{2p} + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}(|y_{i-m}|^{2p\gamma} + |z_{i-m}|^{2p\gamma})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\le C + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}(\sup_{0\le k\le i}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p}) + C\Delta\sum_{i=0}^{l}[1+\mathbb{E}|y_i|^{2p}+\mathbb{E}|y_{i-m}|^{2p}\\
&\quad +\mathbb{E}|y_{i-m}|^{2p\gamma}+\mathbb{E}|z_i|^{2p}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{2p}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{2p\gamma}]\\
&\le C + C\Delta\sum_{i=0}^{l}\mathbb{E}(\sup_{0\le k\le i}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p}) + C\Delta\sum_{i=0}^{l}[\mathbb{E}|y_{i-m}|^{2p\gamma}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{2p\gamma}], \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

这里, 使用了以下不等式

$$\begin{aligned}
|y_k|^{2p} &\le 2^{2p-1}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p} + 2^{2p-1}|N(y_{k-m})|^{2p}\\
&\le 2^{2p-1}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p} + 2^{2p-1}3^{p-1}K^p(1+|y_{k-m}|^{2p}+|y_{k-m}|^{2p\gamma}),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
|z_k|^{2p} &\le 2^{2p-1}|z_k - N(z_{k-m})|^{2p} + 2^{2p-1}|N(z_{k-m})|^{2p}\\
&\le 2^{2p-1}|z_k - N(z_{k-m})|^{2p} + 2^{2p-1}3^{p-1}K^p(1+|z_{k-m}|^{2p}+|z_{k-m}|^{2p\gamma}),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$|y_{k-m}|^{2p} \le 1 + |y_{k-m}|^{2p\gamma}, \tag{3.31}$$

$$|z_{k-m}|^{2p} \le 1 + |z_{k-m}|^{2p\gamma}. \tag{3.32}$$

利用离散型的 Gronwall 不等式, 由 (3.28) 式可以推出: 对任意的 $p \ge 1$ 有

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le l}|y_k - N(y_{k-m})|^{2p}\big] \le C + C\Delta\sum_{i=0}^{l-1}\big[\mathbb{E}|y_{i-m}|^{2p\gamma}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{2p\gamma}\big]. \tag{3.33}$$

类似于定理 3.1 的证明方法, 对于任给的 $p \ge 2$, 令

$$p_i = ([M/m]+2-i)p\gamma^{[M/m]+1-i}, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ [M/m].$$

易知 $p_i \ge 2$, $p_{i+1}\gamma < p_i$ 和 $p_{[M/m]+1} = p$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ [M/m]$. 通过 (3.33) 和 $\varphi(t) \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\ \mathbb{R}^n)$, 可得

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le m}|y_k - N(y_{k-m})|^{p_1}\big] \le C\big[1+\Delta\sum_{i=0}^{m-1}(\mathbb{E}|y_{i-m}|^{p_1\gamma}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{p_1\gamma})\big] \le C. \tag{3.34}$$

因此, 可证

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le m}|y_k|^{p_1}\big] \le \mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le m}|y_k - N(y_{k-m})|^{p_1}\big] + \mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le m}|N(y_{k-m})|^{p_1}\big] \le C. \tag{3.35}$$

联合 (3.33), (3.35) 和 Lyapunov 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{0\le k\le 2m}|y_k - N(y_{k-m})|^{p_2}\big] &\le C\big[1+\Delta\sum_{i=0}^{2m-1}(\mathbb{E}|y_{i-m}|^{p_2\gamma}+\mathbb{E}|z_{i-m}|^{p_2\gamma})\big]\\
&\le C\big\{1+\Delta\sum_{i=0}^{2m-1}[(\mathbb{E}|y_{i-m}|^{p_1})^{\frac{p_2\gamma}{p_1}}+(\mathbb{E}|z_{i-m}|^{p_1})^{\frac{p_2\gamma}{p_1}}]\big\}\\
&\le C.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

因此, 可证

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le 2m}|y_k|^{p_2}\Big]\le\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le 2m}|y_k-N(y_{k-m})|^{p_2}\Big]+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le 2m}|N(y_{k-m})|^{p_2}\Big]\le C.$$

因为 $M/m=[T/\tau]$ 是一个有限数, 所以反复运用前面的方法可得, 对于任意的 $p\ge 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le M}|y_k|^{p}\Big]\le\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le([M/m]+1)m}|y_k|^{p_{[M/m]+1}}\Big]\le C.$$

然后根据不等式 (3.21), 也立即可证得 $\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le k\le M}|z_k|^{p}\Big]\le C.$ □

4. 分裂步 θ 方法的强收敛阶

为了方便分析 SST 方法的强收敛阶, 我们引入该数值格式的连续形式. 准确地说, 对于 $t\in[t_k,t_{k+1})$, $t_k=k\Delta$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$, 定义连续解 $z(t)$ 和 $y(t)$:

$$\begin{cases} z(t)-N(z(t-\tau))=z(t_k)-N(z(t_k-\tau))+\theta(t-t_k)f(y_k,y_{k-m})\\ \qquad\qquad +(1-\theta)(t-t_k)f(z_k,z_{k-m})+g(y_k,y_{k-m})(B(t)-B(t_k)),\\ y(t)-N(y(t-\tau))=z(t)-N(z(t-\tau))+\theta\Delta f(y(t),y(t-\tau))\\ \qquad\qquad +(1-\theta)\Delta f(z(t),z(t-\tau)). \end{cases}\tag{4.1}$$

当 $t\in[-\tau,0]$ 时, $z(t)=y(t)=\varphi(t)$. 易知上述连续时间随机过程 $z(t)$ 和 $y(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$- 可测的, 且 $z(t_k)=z_k$, $y(t_k)=y_k$. 在以下分析中, 我们会重复使用 $z(t)$ 的一个等价定义

$$\begin{aligned} z(t)-N(z(t-\tau))=&z(0)-N(z(-\tau))+\theta\int_0^t f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s\\ &+(1-\theta)\int_0^t f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s+\int_0^t g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}B(s). \end{aligned}\tag{4.2}$$

当 $s\in[t_k,t_{k+1})$ 时, $\check{s}=t_k$. 我们称 $z(t)$ 和 $y(t)$ 分别是 z_k 和 y_k 的连续扩张.

定理 4.1. 如果假设 2.1 和假设 2.2 都成立, $0<\Delta<\min\{\bar{\Delta},\ \underline{\Delta}\}$, 且假设初值函数 $\varphi(t)$ 满足一致 L^p- 连续, 即对任意的 $u_1,\ u_2\in[-\tau,0]$, 存在一个常数 $\hat{C}$ 使得

$$\mathbb{E}\mid\varphi(u_2)-\varphi(u_1)\mid^p\le\hat{C}\mid u_2-u_1\mid^{\frac{p}{2}},\tag{4.3}$$

那么, 对于任意的 $p\ge 2$ 有

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|x(t)-z(t)|^p\Big]\le C\Delta^{\frac{p}{2}}\tag{4.4}$$

和

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|x(t)-y(t)|^p\Big]\le C\Delta^{\frac{p}{2}}\tag{4.5}$$

成立, 其中 $\underline{\Delta}$ 由 (2.14) 式给出, $\bar{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{6\bar{C}}\theta}$.

为了方便讨论定理 4.1 的证明, 首先证明如下两个引理.

引理 4.2. 如果定理 4.1 中的条件满足, 那么对任意的 $p\ge 2$, 有

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|z(t)|^p\Big]\le C,\tag{4.6}$$

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|y(t)|^p\big]\le C \tag{4.7}$$

成立, 其中 $C=C(p,T)$ 是一个与 Δ 无关的正常数.

证明. 对任意的 $p\ge 2$, 在 (4.2) 式两边同时 p 次方可得

$$\begin{aligned}
&|z(t)-N(z(t-\tau))|^p\\
\le&4^{p-1}(|z(0)-N(z(-\tau))|^p+4^{p-1}|\theta\int_0^t f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s|^p\\
&+4^{p-1}|(1-\theta)\int_0^t f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s|^p+4^{p-1}|\int_0^t g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}B(s)|^p).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

使用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\le s\le t}|z(s)-N(z(s-\tau))|^p)\\
\le&4^{p-1}\mathbb{E}|z(0)-N(z(-\tau))|^p+4^{p-1}C\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}\int_0^s|f(y(\check{r}),y(\check{r}-\tau))|^p dr\big]\\
&+4^{p-1}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}\int_0^s|f(z(\check{r}),z(\check{r}-\tau))|^p dr\big]+4^{p-1}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s g(y(\check{r}),y(\check{r}-\tau))\mathrm{d}B(r)|^p)\big]\\
\le&4^{p-1}\big\{\mathbb{E}|z(0)-N(z(-\tau))|^p+\mathbb{E}\int_0^t|f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^p ds\\
&+\mathbb{E}\int_0^t|f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))|^p ds+\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s g(y(\check{r}),y(\check{r}-\tau))dB(r)|^p\big]\big\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

根据 (2.11) 式和定理 3.2, 可知

$$\mathbb{E}\int_0^t|f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^p\mathrm{d}s\le C\int_0^t(1+\mathbb{E}|y(\check{s})|^p+\mathbb{E}|y(\check{s}-\tau))|^p+\mathbb{E}|y(\check{s}-\tau))|^{p\gamma})ds\le C, \tag{4.10}$$

$$\mathbb{E}\int_0^t|f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))|^p\mathrm{d}s\le C\int_0^t(1+\mathbb{E}|z(\check{s})|^p+\mathbb{E}|z(\check{s}-\tau))|^p+\mathbb{E}|z(\check{s}-\tau))|^{p\gamma})ds\le C. \tag{4.11}$$

应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Hölder 不等式, (2.11) 和定理 3.2 可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s g(y(\check{r}),y(\check{r}-\tau))\mathrm{d}B(r)|^p\big]&\le C_p\mathbb{E}(\int_0^t|g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^2\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}\\
&\le C\int_0^t\mathbb{E}|g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^p\mathrm{d}s\\
&\le C.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

结合不等式 (4.9)-(4.12), 可得

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|z(s)-N(z(s-\tau))|^p]\le C, \tag{4.13}$$

因此, 不难得出 $\mathbb{E}[\sup\limits_{0\le s\le t}|z(s)|^p]\le C$. 联立 (2.11), (4.1) 和 (4.12), 对任意的 $p\ge 2$, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|y(s)-N(y(s-\tau))|^p]\\
\le& C\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|z(s)-N(z(s-\tau))|^p]+C\Delta^p\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|f(y(s),y(s-\tau))|^p]\\
&+C\Delta^p\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|f(z(s),z(s-\tau))|^p]\\
\le& C\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|z(s)-N(z(s-\tau))|^p]+C\Delta^p(1+\mathbb{E}|y(t)|^p+\mathbb{E}|y(t-\tau)|^p+\mathbb{E}|y(t-\tau)|^{p\gamma}\\
&+\mathbb{E}|z(t)|^p+\mathbb{E}|z(t-\tau)|^p+\mathbb{E}|z(t-\tau)|^{p\gamma})\\
\le& C(1+\mathbb{E}|y(t)|^p+\mathbb{E}|y(t-\tau)|^p+\mathbb{E}|y(t-\tau)|^{p\gamma}+\mathbb{E}|z(t)|^p+\mathbb{E}|z(t-\tau)|^p+\mathbb{E}|z(t-\tau)|^{p\gamma}).
\end{aligned}\tag{4.14}$$

因此根据定理 3.1 的证明过程, 类似地可证明此定理. □

引理 4.3. 如果定理 4.1 中的条件满足, 那么存在一个与 Δ 无关的正常数 C, 使得对任意的 $p\ge 2$, $t\in[0,T]$, 有

$$\mathbb{E}|x(t)-x(\check{t})|^p\le C\Delta^{\frac{p}{2}},\tag{4.15}$$

$$\mathbb{E}|z(t)-z(\check{t})|^p\le C\Delta^{\frac{p}{2}},\tag{4.16}$$

$$\mathbb{E}|z(t)-y(\check{t})|^p\le C\Delta^{\frac{p}{2}}\tag{4.17}$$

成立, 其中当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时, $\check{t}=t_k$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$.

证明. 当 $t\in[0,T]$ 时, 根据定理 4.1, Hölder 不等式以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|x(t)-N(x(t-\tau)-(x(\check{t})-N(x(\check{t}-\tau)))|^p\\
\le& C\mathbb{E}|\int_{\check{t}}^t f(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}s|^p+C\mathbb{E}|\int_{\check{t}}^t g(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}B(s)|^p\\
\le& C\Delta^{p-1}\int_{\check{t}}^t\mathbb{E}|f(x(s),x(s-\tau))|^p\mathrm{d}s+C[\int_{\check{t}}^t\mathbb{E}|g(x(s),x(s-\tau))|^2\mathrm{d}s]^{\frac{p}{2}}\\
\le& C\Delta^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

利用假设 2.2, Hölder 不等式和 (4.17) 式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|x(t)-x(\check{t})|^p\\
=& C\mathbb{E}|x(t)-N(x(t-\tau))-(x(\check{t})-N(x(\check{t}-\tau)))|^p+C\mathbb{E}|N(x(t-\tau))-N(x(\check{t}-\tau))|^p\\
\le& C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}\{(1+|x(t-\tau)|^{q_3}+|x(\check{t}-\tau)|^{q_3})|x(t-\tau)-x(\check{t}-\tau)|\}^p\\
\le& C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}\{(1+|x(t-\tau)-x(\check{t}-\tau)|^{q_3}+|x(\check{t}-\tau)|^{q_3})|x(t-\tau)-x(\check{t}-\tau)|\}^p\\
\le& C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}|x(t-\tau)-x(\check{t}-\tau)|^{(q_3+1)p}.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

对任意的 $t\in[0,T]$, 可知: 存在一个整数 k 使得 $t\in[(k-1)\tau,k\tau)\bigcap[0,T]$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ M$.

结合 (4.3) 和 (4.18) 式, 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x(t)-x(\check{t})|^p \leq & C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}|x(t-k\tau)-x(\check{t}-k\tau)|^{(q_3+1)p}\\ \leq & C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}|\varphi(t-k\tau)-\varphi(\check{t}-k\tau)|^{(q_3+1)p}\\ \leq & C\Delta^{\frac{p}{2}}+C|t-\check{t}|^{\frac{(q_3+1)p}{2}}\\ \leq & C\Delta^{\frac{(q_3+1)p}{2}}\\ \leq & C\Delta^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|z(t)-N(z(t-\tau)-(z(\check{t})-N(z(\check{t}-\tau)))|^p\\ =&C\mathbb{E}|\int_{\check{t}}^{t}\theta f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s|^p+C\mathbb{E}|\int_{\check{t}}^{t}(1-\theta)f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s|^p\\ &+C\mathbb{E}|\int_{\check{t}}^{t}f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}B(s)|^p\\ \leq&C\Delta^{p-1}\int_{\check{t}}^{t}\mathbb{E}|f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^p\mathrm{d}s\\ &+C\Delta^{p-1}\int_{\check{t}}^{t}\mathbb{E}|f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))|^p\mathrm{d}s+C[\int_{\check{t}}^{t}\mathbb{E}|g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))|^2ds]^{\frac{p}{2}}\\ \leq&C\Delta^{\frac{p}{2}},\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|z(t)-z(\check{t})|^p\\ \leq&C\mathbb{E}|z(t)-N(z(t-\tau))-(z(\check{t})-N(z(\check{t}-\tau)))|^p+C\mathbb{E}|N(z(t-\tau))-N(z(\check{t}-\tau))|^p\\ \leq&C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}|z(t-\tau)-z(\check{t}-\tau)|^{(q_3+1)p}\\ \leq&C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\mathbb{E}|z(t-k\tau)-z(\check{t}-k\tau)|^{(q_3+1)p}\\ \leq&C\Delta^{\frac{p}{2}}+C|t-\check{t}|^{\frac{(q_3+1)p}{2}}\\ \leq&C\Delta^{\frac{(q_3+1)p}{2}}\\ \leq&C\Delta^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

利用 $y(\check{t})-N(y(\check{t}-\tau))=z(\check{t})-N(z(\check{t}-\tau))+\theta\Delta f(y(\check{t}),\ y(\check{t}-\tau))+(1-\theta)\Delta f(z(\check{t}),z(\check{t}-\tau))$, 和不等式 (4.10), (4.11), 可得

$$\mathbb{E}|z(\check{t})-y(\check{t})|^p\leq C\Delta^{\frac{p}{2}},$$

最后由 (4.16) 式可得

$$\mathbb{E}|z(t)-y(\check{t})|^p\leq C\mathbb{E}|z(t)-z(\check{t})|^p+C\mathbb{E}|z(\check{t})-y(\check{t})|^p\leq C\Delta^{\frac{p}{2}}.\tag{4.23}$$

证毕. □

在上述两个引理的基础上, 现在给出定理 4.1 的详细证明过程.

定理 4.1 的证明. 根据 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的定义, 可得

$$x(t)-N(x(t-\tau))=x(0)-N(x(-\tau))+\int_0^t f(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}s+\int_0^t g(x(s),x(s-\tau))\mathrm{d}B(s),\tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} z(t)-N(z(t-\tau)) =& z(0)-N(z(-\tau))+\theta\int_0^t f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s \\ & +(1-\theta)\int_0^t f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))\mathrm{d}s+\int_0^t g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))\mathrm{d}B(s). \end{aligned} \tag{4.25}$$

联立 (4.24) 和 (4.25) 式可得

$$\begin{aligned} & |x(t)-N(x(t-\tau))-[z(t)-N(z(t-\tau))]| \\ =& |\int_0^t [\theta(f(x(s),x(s-\tau))-f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau)))+(1-\theta)(f(x(s),x(s-\tau))-f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau)))]\mathrm{d}s \\ & +\int_0^t [g(x(s),x(s-\tau))-g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau))]\mathrm{d}B(s)|. \end{aligned} \tag{4.26}$$

为了方便讨论, 令

$$\begin{aligned} & e(t)=x(t)-z(t), \\ & \varepsilon(t)=x(t)-N(x(t-\tau))-(z(t)-N(z(t-\tau))), \\ & F(s)=\theta(f(x(s),x(s-\tau))-f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau)))+(1-\theta)(f(x(s),x(s-\tau))-f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau))), \\ & G(s)=g(x(s),x(s-\tau))-g(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau)). \end{aligned}$$

由 Itô 公式和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t)|^2 &= \int_0^t 2\langle\varepsilon(s),F(s)\rangle\mathrm{d}s+\int_0^t |G(s)|^2\mathrm{d}s+\int_0^t 2\langle\varepsilon(s),G(s)\rangle\mathrm{d}B(s) \\ &\le \int_0^t (|\varepsilon(s)|^2+|F(s)|^2)\mathrm{d}s+\int_0^t |G(s)|^2\mathrm{d}s+\int_0^t 2\langle\varepsilon(s),G(s)\rangle\mathrm{d}B(s). \end{aligned} \tag{4.27}$$

那么对任意的 $p\ge 2$, 使用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|\varepsilon(s)|^p\big] \\ \le & C\mathbb{E}\int_0^t |\varepsilon(s)|^p\mathrm{d}s+C\mathbb{E}\int_0^t (|F(s)|^p+|G(s)|^p)\mathrm{d}s \\ & +4^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}\int_0^s 2\langle\varepsilon(r),G(r)\rangle\mathrm{d}B(r)\big]^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

联合假设 (2,1), Hölder 不等式, 定理 3.1, 定理 3.2, 引理 4.2 和引理 4.3, 可证

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\int_0^t |F(s)|^p\mathrm{d}s \\ \le & \mathbb{E}\int_0^t |(f(x(s),x(s-\tau))-f(y(\check{s}),y(\check{s}-\tau)))+(f(x(s),x(s-\tau))-f(z(\check{s}),z(\check{s}-\tau)))|^p\mathrm{d}s \\ \le & C\mathbb{E}\int_0^t [|x(s)-y(\check{s})|+(1+|x(s-\tau)|^{q_1}+|y(\check{s}-\tau)|^{q_1})|x(s-\tau)-y(\check{s}-\tau)|]^p\mathrm{d}s \\ & +C\mathbb{E}\int_0^t [|x(s)-z(\check{s})|+(1+|x(s-\tau)|^{q_1}+|z(\check{s}-\tau)|^{q_1})|x(s-\tau)-z(\check{s}-\tau)|]^p\mathrm{d}s \\ \le & C\mathbb{E}\int_0^t [|x(s)-y(\check{s})|^p+(1+|x(s-\tau)|^{pq_1}+|y(\check{s}-\tau)|^{pq_1})|x(s-\tau)-y(\check{s}-\tau)|^p]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\mathbb{E}\int_0^t[|x(s)-z(\check{s})|^p+(1+|x(s-\tau)|^{pq_1}+|z(\check{s}-\tau)|^{pq_1})|x(s-\tau)-z(\check{s}-\tau)|^p]\mathrm{d}s\\
\le& C\mathbb{E}\int_0^t[|x(s)-z(s)|^p+|z(s)-z(\check{s})|^p+|z(\check{s})-y(\check{s})|^p]\mathrm{d}s\\
&+C\int_0^t[\mathbb{E}(1+|x(s-\tau)|^{2pq_1}+|y(\check{s}-\tau)|^{2pq_1})]^{\frac{1}{2}}[\mathbb{E}|x(s-\tau)-y(\check{s}-\tau)|^{2p}]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\\
&+C\mathbb{E}\int_0^t[|x(s)-z(s)|^p+|z(s)-z(\check{s})|^p]\mathrm{d}s\\
&+C\int_0^t[\mathbb{E}(1+|x(s-\tau)|^{2pq_1}+|z(\check{s}-\tau)|^{2pq_1})]^{\frac{1}{2}}[\mathbb{E}|x(s-\tau)-z(\check{s}-\tau)|^{2p}]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\\
\le& C\int_0^t\mathbb{E}|e(s)|^p\mathrm{d}s+C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

和

$$
\mathbb{E}\int_0^t|G(s)|^p\mathrm{d}s\le C\int_0^t\mathbb{E}|e(s)|^p\mathrm{d}s+C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s. \tag{4.30}
$$

利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Hölder 不等式以及 Young 不等式 [13], 可得: 对于任意的 $p\ge 2$, $\delta>0$ 和 $r\in[0,T]$ 有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}\int_0^s 2\langle\varepsilon(r),G(r)\rangle dB(r)\big]^{\frac{p}{2}}\\
\le& C_p\mathbb{E}(\int_0^t 4|\varepsilon(s)|^2|G(s)|^2ds)^{\frac{p}{4}}\\
\le& C_p\mathbb{E}[(4\sup_{0\le s\le t}|\varepsilon(s)|^2)\int_0^t|G(s)|^2ds]^{\frac{p}{4}}\\
\le& \frac{1}{2\delta}\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|\varepsilon(s)|^p]+C\int_0^t\mathbb{E}|G(s)|^pds.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

取 $\delta=4^{\frac{p}{2}-1}$, 并结合不等式 (4.28)-(4.31) 可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|\varepsilon(s)|^p\big]&\le C\int_0^t\mathbb{E}|\varepsilon(s)|^pds+C\int_0^t\mathbb{E}|e(s)|^p\mathrm{d}s+C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s\\
&\le C\int_0^t\mathbb{E}|e(s)|^p\mathrm{d}s+C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

由引理 4.1 和引理 4.2 的证明过程作类似处理, 进一步可得

$$
\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|e(s)|^p\big]\le C\int_0^t\mathbb{E}|e(s)|^p\mathrm{d}s+C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s+\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|e(s-\tau)|^p)\big]. \tag{4.33}
$$

利用连续型的 Gronwall 不等式, 可得

$$
\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|e(s)|^p\big]\le C\Delta^{\frac{p}{2}}+C\int_0^t\sqrt{\mathbb{E}|e(s-\tau)|^{2p}}\mathrm{d}s+\mathbb{E}\big[\sup_{0\le s\le t}|e(s-\tau)|^p)\big]. \tag{4.34}
$$

最后, 再结合 (4.5) 和 (4.1) 的第二个式子, 并利用定理 3.1 和引理 4.3 中所述的证明方法, 即可完成该定理的证明. □

5. 数值实验

本节将利用 SST 方法 (2.13a-2.13b) 求解 4 个不同情形的中立型随机延迟微分方程, 并测试其数值解的强收敛阶. 在实验中, 采用样本均值逼近数学期望. 具体地说, 利用公式

$$\varepsilon = \frac{1}{5000}\sum_{i=1}^{5000} \mid X^{(i)}(t_M) - X_M^{(i)} \mid \tag{5.1}$$

来计算数值解在终点处 t_M 的误差, 其中 $X^{(i)}(t_M)$, $X_M^{(i)}$ 分别表示第 i 条样本轨道的精确解和数值解.

由于方程 (1.1) 的精确解很难显式得到, 所以我们考虑用步长为 $\Delta = 2^{-14}$ 的数值解替代未知的精确解 [29, 30]. 另外, 采用五种不同的步长 $\Delta = 2^{-5},\ 2^{-6},\ 2^{-7},\ 2^{-8}, 2^{-9}$ 分别计算相应的数值解.

例 1. 考虑非线性 NSDDE ($n = d = 1$):

$$\mathrm{d}[x(t) - \frac{1}{2}x^3(t-1)] = [-x(t) - x^3(t-1)]\mathrm{d}t + [x(t) - x^2(t-1)]\mathrm{d}B(t),\ \ t \in [0, 2], \tag{5.2}$$

其初始值 $x(t) = 1$, $t \in [-1, 0]$. 计算结果见表 1 和图 1.

表 1 对于方程 (1.1), 当 T $= 2$ 时, SST 方法的绝对误差 ε

Δ	$\theta=0$	$\theta=0.2$	$\theta=0.4$	$\theta=0.5$	$\theta=0.6$	$\theta=0.8$	$\theta=1$
2^{-5}	2.6758e-01	2.8284e-01	2.8162e-01	2.8118e-01	2.8086e-01	2.8060e-01	2.8074e-01
2^{-6}	1.9607e-01	1.9519e-01	1.9501e-01	1.9497e-01	1.9498e-01	1.9513e-01	1.9548e-01
2^{-7}	1.4529e-01	1.4563e-01	1.4555e-01	1.4554e-01	1.4554e-01	1.4561e-01	1.4574e-01
2^{-8}	9.9761e-02	9.9534e-02	9.9564e-02	9.9585e-02	9.9610e-02	9.9685e-02	9.9773e-02
2^{-9}	7.4117e-02	6.7721e-02	6.7766e-02	6.7790e-02	6.7817e-02	6.7877e-02	6.7944e-02
收敛阶	4.4863e-01	5.3507e-01	5.3022e-01	5.2824e-01	5.2655e-01	5.2411e-01	5.2220e-01

例 2. 考虑多维非线性 NSDDEs ($n = 2,\ d = 1$):

$$\begin{aligned} d\begin{bmatrix} x_1(t) - \frac{1}{4}x_1^2(t-1) \\ x_2(t) - \frac{1}{4}x_2^2(t-1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t-1) + x_1(t-1)x_2(t-1) - x_2^2(t-1) \\ x_1(t) - x_2(t) + x_1^2(t-1) - \frac{1}{2}x_1(t-1)x_2(t-1) + \frac{1}{4}x_2^2(t-1) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1(t-1)x_2(t-1) \\ x_2(t) + x_1(t-1)x_2(t-1) \end{bmatrix} dB(t), \quad t \in [0, 2], \end{aligned} \tag{5.3}$$

其初始值 $x(t) = (1, 1)^T$, $t \in [-1, 0]$. 计算结果见图 2.

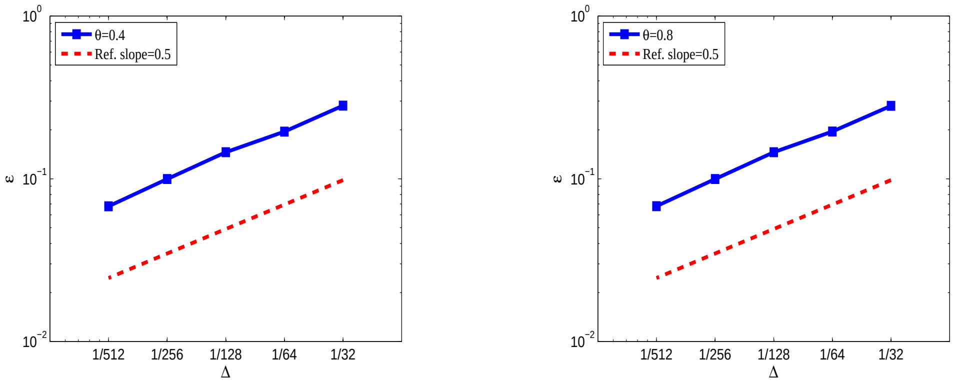

图 1 当 $\theta = 0.4$ 时, SST 方法的强收敛阶 (左边) 和当 $\theta = 0.8$ 时, SST 方法的强收敛阶 (右边)

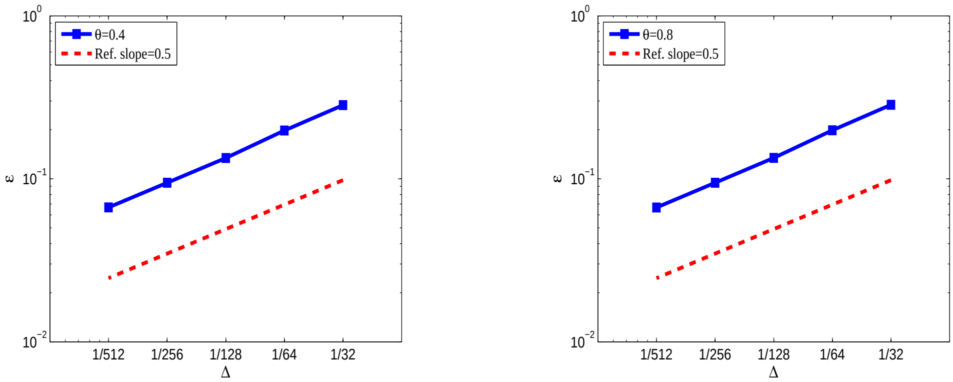

图 2 当 $\theta = 0.4$ 时, SST 方法的强收敛阶 (左边) 和当 $\theta = 0.8$ 时, SST 方法的强收敛阶 (右边)

例 3. 考虑多维多噪声非线性 NSDDEs($n = d = 2$):

$$
\begin{aligned}
d\begin{bmatrix} x_1(t) - \frac{3}{4}x_1^2(t-1) \\ x_2(t) - \frac{3}{4}x_2^2(t-1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) - x_1^2(t-1) + \sin(x_1(t-1)) \\ \frac{1}{2}x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t-1) + \cos(x_2(t-1)) \end{bmatrix} dt \\
& + \begin{bmatrix} x_1(t) + x_2(t-1)\sin(x_1(t-1)) \\ x_2(t) + x_1(t-1)\cos(x_2(t-1)) \end{bmatrix} dB_1(t) \\
& + \begin{bmatrix} x_1(t) + x_2(t-1)\cos(x_1(t-1)) \\ x_2(t) + x_1(t-1)\sin(x_2(t-1)) \end{bmatrix} dB_2(t), \quad t \in [0, 2],
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

其初始值 $x(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$, $t \in [-1, 0]$. 计算结果见图 3.

例 4. 考虑 $N(0) \neq 0$ 的 NSDDE ($n = d = 1$):

$$
\mathrm{d}[x(t) - \frac{1}{2}x^2(t-1) - 1] = [-x(t) - x^2(t-1)]\mathrm{d}t + [x(t) - x^3(t-1)]\mathrm{d}B(t), \ t \in [0, 2], \tag{5.5}
$$

其初始值 $x(t) = 1$, $t \in [-1, 0]$. 计算结果见图 4.

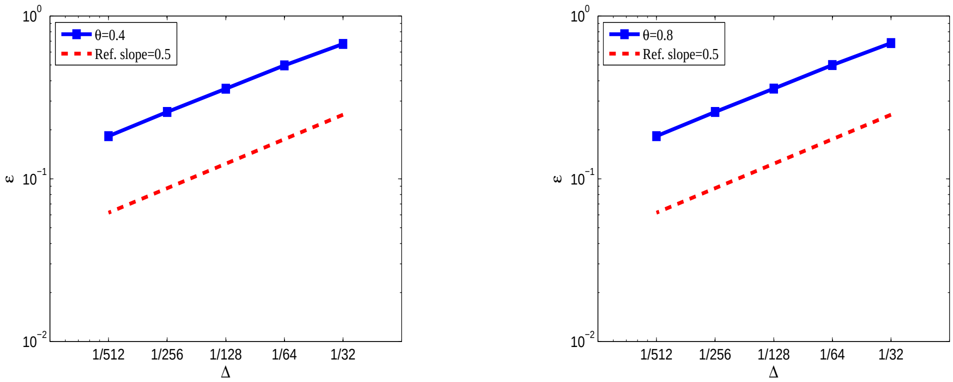

图 3 当 $\theta = 0.4$ 时, SST 方法的强收敛阶 (左边) 和当 $\theta = 0.8$ 时, SST 方法的强收敛阶 (右边)

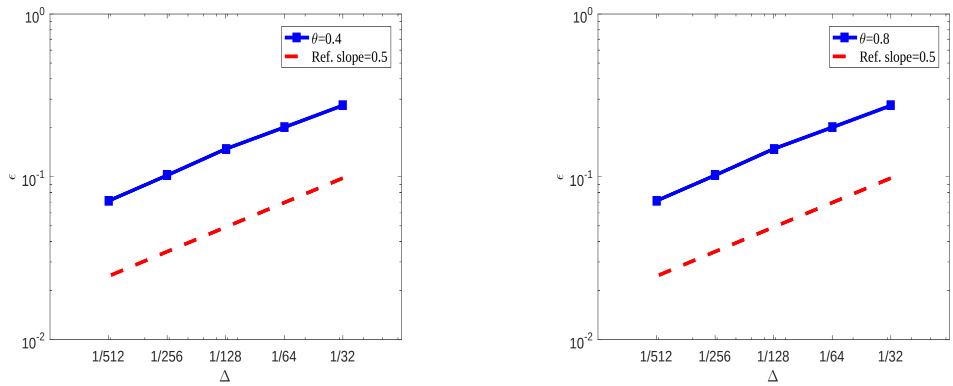

图 4 当 $\theta = 0.4$ 时, SST 方法的强收敛阶 (左边) 和当 $\theta = 0.8$ 时, SST 方法的强收敛阶 (右边)

由表 1 与图 1 可见, 对于标量噪声驱动的非线性中立型随机延迟微分方程, SST 方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 同样地, 图 2 与图 3 给出的是多维噪声驱动的非线性系统的情形, 图 4 给出了 $N(0) \neq 0$ 的情形, 最后都表明了实验数据与其理论结果是一致的.

6. 总结与展望

本文将 Ding 等人提出的 SST 方法推广到中立型随机延迟微分方程. 在漂移系数和扩散系数关于非延迟项满足全局 Lipschitz 条件, 关于延迟项满足多项式增长条件以及中立项满足多项式增长条件下, 证明了该方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 为了进一步证实所获得的理论结果, 我们对标量噪声驱动的非线性中立型随机延迟微分方程与多维噪声驱动的非线性系统以及 $N(0) \neq 0$ 的情形都做了相应的数值实验. 而且, 所有的数值结果与我们的理论分析均保持一致. 下一步, 我们将考虑对该方法作稳定性分析.

参 考 文 献

[1] Mao X R. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. Horword, Chichester, UK, 1997.

[2] Bao H B, Cao J D. Stochastic global exponential stability for neutral-type impulsive neural networks with mixed time-delays and Markovian jumping parameters[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2011, 16(9): 3786–3791.

[3] Guo C J, O'Regan D, Deng F Q, Agarwal R P. Fixed points and exponential stability for a stochastic neutral cellular neural network[J]. Appl. Math. Lett., 2013, 26(8): 849–853.

[4] Kolmanovskii V, Koroleva N, Maizenberg T, Mao X R, Matasov A. Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. Stochastic. Anal. Appl., 2003, 21(4): 819–847.

[5] Zhang H M, Gan S Q. Mean square convergence of one-step methods for neutral stochastic differential delay equations[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 204(2): 884–890.

[6] Ding X H, Ma Q, Zhang L. Convergence and stability of the split-step θ-method for stochastic differential equations[J]. Computers Math. Appl., 2010, 60(5): 1310–1321.

[7] Cao W R, Hao P, Zhang Z Q. Split-step θ-method for stochastic delay differential equations[J]. Appl. Numer. Math., 2014, 76: 19–33.

[8] Ji Y, Yuan C. Tamed EM scheme of neutral stochastic differential delay equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2017, 326: 337–357

[9] Gan S Q, Schurz H, Zhang H M. Mean square convergence of stochastic θ-methods for nonlinear neutral stochastic differential delay equations[J]. Int. J. Numer. Anal. Model., 2011, 8(2): 201–213.

[10] Milošević M. Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler-Maruyama method[J]. Math. Comput. Model., 2011, 54: 2235–2251.

[11] Milošević M. Implitcit numerical methods for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay[J]. Appl. Math. Comput., 2014, 224: 741–760.

[12] Ji Y T, Bao J H, Yuan C Y. Convergence of EM scheme for neutral stochastic differential delay equations[J]. 2016, arXiv: 1511.07703v2.

[13] Yan Z P, Xiao A G, Tang X. Strong convergence of the split-step theta method for neutral stochastic delay differential equations[J]. Appl. Numer. Math., 2017, 120: 215–232.

[14] Tan L, Yuan C G. Convergence rates of theta-method for neutral SDDEs under non-globally Lipschitz continuous coefficients[J]. 2017, arXiv: 1701.00223v1.

[15] Wu F K, Mao X R. Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2008, 46(4): 1821–1841.

[16] Jiang F, Shen Y, Wu F K. A note on order of convergence of numerical method for neutral stochastic functional differential equations[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2012, 17(3): 1194–1200.

[17] Zhou S B, Fang Z. Numerical approximation of nonlinear neutral stochastic functional differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2013, 41(1–2): 427–445.

[18] Milošević M. Convergence and almost sure exponential stability of implicit numerical methods for a class of highly nonlinear neutral stochastic differential equations with constant delay[J]. J. Comput. Appl. Math., 2015, 280: 248–264.

[19] Gan S Q, Xiao A G, Wang D S. Stability of analytical and numerical solutions of nonlinear stochastic delay differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2014, 268: 5–22.

[20] Huang C M. Exponential mean square stability of numerical methods for systems of stochastic differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2012, 236(16): 4016–4026.

[21] Huang C M. Mean square stability and dissipativity of two classes of theta methods for systems of stochastic delay differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2014, 259: 77–86.

[22] Wang W Q, Chen Y P. Mean-square stability of semi-implicit Euler method for nonlinear neutral stochastic delay differential equations[J]. Appl. Numer. Math., 2011, 61(5): 696–701.

[23] Zong X F, Wu F K. Exponential stability of the exact and numerical solutions for neutral stochastic delay differential equations[J]. Appl. Math. Model., 2015, 40(1): 19–30.

[24] Wang X J, Gan S Q. B-convergence of split-step one-leg theta methods for stochastic differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2012, 38(1-2): 489–503.

[25] Higham D J, Mao X R, Stuart A. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2002, 40: 1041–1063.

[26] Kloeden P E, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations[M]. Springer, Berlin, 1992.

[27] Bao J H, Yuan C G. Convergence rate of EM scheme for SDDEs[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 20011, 141: 3231–3243.

[28] Wu F K, Mao X R, Chen K. The Cox-Ingersoll-Ross model with delay and strong convergence of its Euler-Maruyama approximate solutions[J]. Appl. Numer. Math., 2009, 59(10): 2641–2658.

[29] Mao X R, Szpruch L. Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients[J]. J. Comput. Appl. Math., 2013, 238(1): 14–28.

[30] Cao W R, Zhang Z Q, Karniadakis G E. Numerical methods for stochastic delay differential equations via the Wong–Zakai approximation[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2015, 37(1): A295–A318.

STRONG CONVERGENCE OF THE SPLIT-STEP θ METHOD FOR NEUTRAL STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Peng Jie Dai Xinjie Xiao Aiguo Bu Weiping

(*School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*)

Abstract

Neutral stochastic delay differential equations often appear in some fields of science and engineering. The aim of this article is to investigate the strong convergence of the split-step θ method for neutral stochastic delay differential equations. When the drift and diffusion coefficients satisfy global Lipschitz condition with respect to the present state and the polynomial growth condition about the delay term respectively, and the neutral term may also be polynomial growth, this method is shown to be strongly convergent of order 1/2. Some numerical results are presented to confirm the obtained theoretical results.

Keywords: Neutral stochastic delay differential equations; Split-step θ method; Strong convergence; Polynomial growth

2010 Mathematics Subject Classification: 34K40, 34K50, 60H35, 65L20