2020 年 2 月 计 算 数 学 第 42 卷第 1 期
Feb., 2020 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.42, No.1

求解加权线性最小二乘问题的一类预处理 GAOR 方法*1)

王 丽
(西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070)

罗玉花
(兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000)

王广彬 2)
(青岛农业大学数学系, 青岛 266109)

摘 要

为了快速求解一类来自加权线性最小二乘问题的 2×2 块线性系统, 本文提出一类新的预处理子用以加速 GAOR 方法, 也就是新的预处理 GAOR 方法. 得到了一些比较结果, 这些结果表明当 GAOR 方法收敛时, 新方法比原 GAOR 方法和之前的一些预处理 GAOR 方法有更好的收敛性. 而且, 数值算例也验证了新预处理子的有效性.

关键词: 加权线性最小二乘问题; 预处理子; GAOR 方法; 比较定理

MR (2010) 主题分类: 65F10, 65F15

1. 引 言

加权线性最小二乘问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}(Ax-b)^TW^{-1}(Ax-b) \tag{1.1}$$

有很广泛的应用背景, 典型的应用是数学模型中的参数估计 [4,12,13], 这里 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$ 是已知的, 方差 - 协方差矩阵 $W\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定的. 为了求解加权线性最小二乘问题 (1.1), 人们常常需要求解线性系统

$$Hy=f, \tag{1.2}$$

其中系数矩阵

$$H=\begin{bmatrix} I_p-B & U\\ L & I_q-C\end{bmatrix}$$

是可逆的, 这里 I_i 表示 i 阶的单位矩阵且

$$B=(b_{ij})_{p\times p},\ C=(c_{ij})_{q\times q},\ L=(l_{ij})_{q\times p},\ U=(u_{ij})_{p\times q}.$$

一些经典的分裂迭代法, 如 Jacobi 方法, Gauss-Seidel 方法, SOR 方法 [7,11,14], AOR 方法 [4,12] 等, 可以求解线性系统 (1.2), 但这些方法的缺点是都需要求矩阵 I_p-B 和 I_q-C 的逆, 这在

* 2018 年 5 月 23 日收到.

1) 基金项目: 西北师范大学数学与统计学院大学生创新计划; 山东高校科技计划 (J16LI04).

2) 通讯作者: 王广彬, E-mail: wguangbin750828@sina.com.

实际计算时是很费时间的. 为了避免求矩阵 I_p-B 和 I_q-C 的逆, Yuan 等人 [12] 提出了求解线性系统 (1.2) 的 GAOR 方法, Darvishi 和 Hessari[3] 研究了当系数矩阵是对角占优矩阵时 GAOR 方法的收敛性. 若将 (1.2) 系数矩阵 H 分裂为

$$H=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B & -U \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

则求解 (1.2) 的 GAOR 方法的迭代格式定义为 [12]

$$y^{(k+1)}=T_{\omega\gamma}y^{(k)}+wg,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.3}$$

其中

$$\begin{aligned} T_{\omega\gamma}&=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ \gamma L & I_q \end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)I_n+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix} B & -U \\ 0 & C \end{bmatrix}\right\} \\ &=\begin{bmatrix} (1-\omega)I_p+\omega B & -\omega U \\ \omega(\gamma-1)L-\omega\gamma LB & (1-\omega)I_q+\omega C+\omega\gamma LU \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

是迭代矩阵,

$$g=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -\gamma L & I_q \end{bmatrix}f.$$

这里, ω 和 γ 为实参数且 $\omega\neq 0$.

为了加快 GAOR 方法的收敛速度, 很多作者考虑了求解线性系统 (1.2) 的预处理 GAOR 方法, 参见 [2, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 16]. 预处理 GAOR 方法的基本思想是用 GAOR 方法求解与 (1.2) 等价的预处理线性系统

$$PHy=Pf,$$

这里的非奇异矩阵 P 称为预处理子. 基于矩阵 H 的结构, 预处理矩阵 PH 可表示为

$$PH=\begin{bmatrix} I_p-\widehat{B} & \widehat{U} \\ \widehat{L} & I_q-\widehat{C} \end{bmatrix},$$

因此求解 (1.2) 的预处理 GAOR 方法为

$$y^{(k+1)}=\widehat{T}_{\omega\gamma}y^{(k)}+w\widehat{g},\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.5}$$

其中

$$\widehat{T}_{\omega\gamma}=\begin{bmatrix} (1-\omega)I_p+\omega\widehat{B} & -\omega\widehat{U} \\ \omega(\gamma-1)\widehat{L}-\omega\gamma\widehat{L}\widehat{B} & (1-\omega)I_q+\omega\widehat{C}+\omega\gamma\widehat{L}\widehat{U} \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\widehat{g}=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -\gamma\widehat{L} & I_q \end{bmatrix}Pf.$$

本文在文献 [9, 17] 的基础上提出了两种新的预处理子用来加速 GAOR 方法求解线性系统 (1.2) 的收敛速度, 建立了一系列比较定理, 通过比较定理说明新预处理子的有效性. 最后, 数值算例说明理论分析的正确性及新预处理子的有效性.

2. 预备知识

本文后面的讨论将需要下面的记号和结论. 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}\geq 0$ $(a_{ij}>0)$ 对于任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 都成立, 则称矩阵 A 是非负 (正) 的, 记为 $A\geq 0$ $(A>0)$. 对两个矩阵 A 和 B, $A\geq B$ $(A>B)$ 是指 $A-B\geq 0$ $(A-B>0)$. 如果把向量当作 $n\times 1$ 矩阵, 则上述记号对向量也是实用的. 矩阵 A 是不可约的是指 A 的有向图是强连通的 [7]. 此外, $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径. 对于非负矩阵有下面的结论:

引理 1. [7] 设矩阵 A 是一个 $n\times n$ 阶的非负不可约矩阵, 则

1) 矩阵 A 有一个正实特征值等于它的谱半径 $\rho(A)$;

2) 对于谱半径 $\rho(A)$, 存在一个特征向量 $x>0$, 使得 $Ax=\rho(A)x$.

引理 2. [1] 设矩阵 A 是一个 $n\times n$ 阶的非负矩阵, 则

1) 若对某个非负向量 $x\neq 0$, 有 $\alpha x\leq Ax$, 则 $\alpha\leq\rho(A)$,

2) 矩阵 A 是不可约矩阵当且仅当 $(I+A)^{n-1}>0$;

3) 若对于某些正向量 x, 有 $Ax\leq\beta x$, 则 $\rho(A)\leq\beta$;

4) 若 A 是一个不可约矩阵, 对于某个非负向量 $x\neq 0$, $0\neq\alpha x\leq Ax\leq\beta x$, $\alpha x\neq Ax$, $\beta x\neq Ax$, 则有 $\alpha<\rho(A)<\beta$, 且向量 x 是一个正向量.

3. 预处理 GAOR 方法

在文 [9] 中, 作者提出用预处理子

$$\overline{P}_i=\begin{bmatrix} I_p+S_i & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix},\quad i=1,2$$

来加速 GAOR 方法求解线性系统 (1.2) 的收敛速度, 其中 S_1 和 S_2 分别为:

$$S_1=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 b_{12} & \cdots & 0 & 0\\ \beta_2 b_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \alpha_p b_{p-1,p}\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_p b_{p,p-1} & 0\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 b_{12} & \cdots & \alpha_p b_{1p}\\ \beta_2 b_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_p b_{p1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

参数满足 $\alpha_s,\ \beta_s>0$ $(s=1,2,\cdots p)$. 此时预处理系数矩阵 $\overline{P}_iH$ 可表示为

$$\overline{P}_iH=\begin{bmatrix} I-\overline{B}_i & \overline{U}_i\\ L & I-C\end{bmatrix},\quad i=1,2,$$

其中

$$\overline{B}_i=B-S_i(I-B),\ \overline{U}_i=(I+S_i)U.$$

因此, 求解预处理线性系统 $\overline{P}_iHy=\overline{P}_if$ 的 GAOR 方法, 即求解线性系统 (1.2) 的预处理 GAOR 方法定义为 [9]:

$$y^{(k+1)}=\overline{T}_{\omega\gamma i}y^{(k)}+\omega\overline{g}_i,\quad k=0,1,2,\cdots,\tag{3.1}$$

其中

$$\overline{T}_{\omega\gamma i}=\begin{bmatrix}(1-\omega)I+\omega\overline{B}_i & -\omega\overline{U}_i\\ \omega(\gamma-1)L-\omega\gamma L\overline{B}_i & (1-\omega)I+\omega C+\omega\gamma L\overline{U}_i\end{bmatrix},\quad i=1,2, \tag{3.2}$$

$$\overline{g}_i=\begin{bmatrix}I & 0\\ -\gamma L & I\end{bmatrix}\overline{P}_i f.$$

注意到预处理子 $\overline{P}_i$ $(i=1,2)$ 并不改变系数矩阵 H 的第二块行, 为了使预处理效果施加到系数矩阵 H 的每一块行, Huang 等人提出了预处理子 [17]

$$P_i^*=\begin{bmatrix}I_p+S_i & 0\\ 0 & I_q+V_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,$$

其中 S_i 定义如上, V_1 和 V_2 分别为:

$$V_1=\begin{bmatrix}0 & \tau_2c_{12} & \cdots & 0 & 0\\ \sigma_2c_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \tau_qc_{q-1,q}\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_qc_{q,q-1} & 0\end{bmatrix},\ V_2=\begin{bmatrix}0 & \tau_2c_{12} & \cdots & \tau_qc_{1q}\\ \sigma_2c_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_qc_{q1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

特别的, 当 S_1 和 V_1 中的参数 $\alpha_s=\beta_s=\sigma_j=\tau_j=1$ $(s=1,2,\cdots p,\ j=1,2,\ \cdots q)$, 则 P_i^* 就是 Huang 等人所提过的预处理子 [18]. 若参数满足 $\alpha_s,\ \beta_s>0,\ s=1,2,\cdots p$, $\sigma_j>0,\ \tau_j>0,\ j=1,2,\ \cdots q$, 此时, 预处理系数矩阵 P_i^*H 可以表示为

$$P_i^*H=\begin{bmatrix}I-B_i^* & U_i^*\\ L_i^* & I-C_i^*\end{bmatrix},\quad i=1,2,$$

其中

$$B_i^*=B-S_i(I-B),\ U_i^*=(I+S_i)U,\ L_i^*=(I+V_i)L,\ C_i^*=C-V_i(I-C).$$

因此, 求解线性系统 (1.2) 的预处理 GAOR 方法 [17] 为:

$$y^{(k+1)}=T_{\omega\gamma i}^*y^{(k)}+\omega g_i^*,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{3.3}$$

其中

$$T_{\omega\gamma i}^*=\begin{bmatrix}(1-\omega)I+\omega B_i^* & -\omega U_i^*\\ \omega(\gamma-1)L_i^*-\omega\gamma L_i^*B_i^* & (1-\omega)I+\omega C_i^*+\omega\gamma L_i^*U_i^*\end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$g_i^*=\begin{bmatrix}I & 0\\ -\gamma L_i^* & I\end{bmatrix}P_i^*f.$$

基于文献 [6] 的思想, 本文我们提出如下预处理子

$$\widehat{P}_i=\begin{bmatrix}I_p+S_i & 0\\ K_i & I_q+V_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,$$

其中 S_i, V_i 定义如上, K_1 为:

(1). 当 $q<p$ 时,

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & -l_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -l_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{q,q-1} & 0 & -l_{q,q+1} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

(2). 当 $q=p$ 时,

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & -l_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ -l_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -l_{q-1,q} \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{q,q-1} & 0 \end{bmatrix},$$

(3). 当 $q>p$ 时,

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & -l_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ -l_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -l_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{p,p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{p+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

K_2 为:

$$K_2=\begin{bmatrix} 0 & -l_{12} & \cdots & -l_{1p} \\ -l_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{q1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

这种情形下, 预处理系数矩阵 $\widehat{P}_iH$ 可表示为

$$\widehat{P}_iH=\begin{bmatrix} I-\widehat{B}_i & \widehat{U}_i \\ \widehat{L}_i & I-\widehat{C}_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,$$

其中

$$\widehat{B}_i=B-S_i(I-B),\ \widehat{U}_i=(I+S_i)U,$$
$$\widehat{L}_i=K_i(I-B)+(I+V_i)L,\ \widehat{C}_i=C-V_i(I-C)-K_iU.$$

为了简便运算, 我们只考虑 K_1 中 $q=p$ 和 K_2 的情况, 则有:

$$\widehat{B}_1=\begin{bmatrix} b_{11}+\alpha_2 b_{12}b_{21} & \cdots & b_{1p}+\alpha_2 b_{12}b_{2p} \\ b_{21}+\alpha_3 b_{23}b_{31}-\beta_2 b_{21}(1-b_{11}) & \cdots & b_{2p}+\alpha_3 b_{23}b_{3p}+\beta_2 b_{21}b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p-1,1}+\alpha_p b_{p-1,p}b_{p1}+\beta_{p-1}b_{p-1,p-2}b_{p-2,1} & \cdots & b_{p-1,p}-\alpha_p b_{p-1,p}(1-b_{pp})+\beta_{p-1}b_{p-1,p-2}b_{p-2,p} \\ b_{p1}+\beta_p b_{p-1,1}b_{p,p-1} & \cdots & b_{pp}+\beta_p b_{p,p-1}b_{p-1,p} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{B}_2=\begin{bmatrix} b_{11}+\alpha_2 b_{12}b_{21}+\cdots+\alpha_p b_{1p}b_{p1} & \cdots & b_{1p}+\alpha_2 b_{12}b_{2p}+\cdots-\alpha_p b_{1p}(1-b_{pp}) \\ b_{21}-\beta_2 b_{21}(1-b_{11}) & \cdots & b_{2p}+\beta_2 b_{21}b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}-\beta_p b_{p1}(1-b_{11}) & \cdots & b_{pp}+\beta_p b_{p1}b_{1p} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1=\begin{bmatrix} c_{11}+\tau_2 c_{12}c_{21}+l_{12}u_{21} & \cdots & c_{1q}+\tau_2 c_{12}c_{2q}+l_{12}u_{2q} \\ c_{21}+\tau_3 c_{23}c_{31}-\sigma_2 c_{21}(1-c_{11})+l_{21}u_{11}+l_{23}u_{31} & \cdots & c_{2q}+\tau_3 c_{23}c_{3q}+\sigma_2 c_{21}c_{1q}+l_{21}u_{1q}+l_{23}u_{3q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1 & \cdots & E_2 \\ c_{q1}+\sigma_q c_{q,q-1}c_{q-1,1}+l_{q,q-1}u_{q-1,1} & \cdots & c_{qq}+\sigma_q c_{q,q-1}c_{q-1,q}+l_{q,q-1}u_{q-1,q} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_2=\begin{bmatrix} F_1 & \cdots & F_2 \\ c_{21}-\sigma_2 c_{21}(1-c_{11})+l_{21}u_{11} & \cdots & c_{2q}+\sigma_2 c_{21}c_{1q}+l_{21}u_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}-\sigma_q c_{q1}(1-c_{11})+l_{q1}u_{11} & \cdots & c_{qq}+\sigma_q c_{q1}c_{1q}+l_{q1}u_{1q} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} E_1&=c_{q-1,1}+\tau_q c_{q-1,q}c_{q1}+\sigma_{q-1}c_{q-1,q-2}c_{q-2,1}+l_{q-1,q-2}u_{q-2,1}+l_{q-1,q}u_{q1}, \\ E_2&=c_{q-1,q}-\tau_q c_{q-1,q}(1-c_{qq})+\sigma_{q-1}c_{q-1,q-2}c_{q-2,q}+l_{q-1,q-2}u_{q-2,q}+l_{q-1,q}u_{qq}, \\ F_1&=c_{11}+\tau_2 c_{12}c_{21}+\cdots+\tau_q c_{1q}c_{q1}+l_{12}u_{21}+\cdots+l_{1p}u_{p1}, \\ F_2&=c_{1q}+\tau_2 c_{12}c_{2q}+\cdots-\tau_q(1-c_{qq})+l_{12}u_{2q}+\cdots+l_{1p}u_{pq}. \end{aligned}$$

我们定义求解线性系统 (1.2) 的预处理 GAOR 方法为:

$$y^{(k+1)}=\widehat{T}_{\omega\gamma i}y^{(k)}+\omega\widehat{g}_i,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{3.5}$$

其中

$$\widehat{T}_{\omega\gamma i}=\begin{bmatrix} (1-\omega)I+\omega\widehat{B}_i & -\omega\widehat{U}_i \\ \omega(\gamma-1)\widehat{L}_i-\omega\gamma\widehat{L}_i\widehat{B}_i & (1-\omega)I+\omega\widehat{C}_i+\omega\gamma\widehat{L}_i\widehat{U}_i \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\widehat{g}_i=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\gamma\widehat{L}_i & I \end{bmatrix}\widehat{P}_i f.$$

4. 比较定理

本节, 我们将给出几个比较定理. 给出的比较定理将表明我们提出的预处理子的有效性. 为此, 我们总假定 GAOR 方法 (1.3) 是收敛的, 即 $\rho(T_{\omega\gamma})<1$.

定理 1. 设 $T_{\omega\gamma}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}$ 分别是 GAOR 方法 (1.3) 和预处理 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 中 H 为不可约矩阵, 并且满足 $L\leq 0$, $U\leq 0$, $B\geq 0$, $C\geq 0$, $0<\omega\leq 1$,

$0 \le \gamma < 1$, $b_{s,s+1} > 0$, $b_{s+1,s} > 0(s = 1, 2, \cdots p-1)$, $b_{ss} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $\beta_s > 0$, 其中 $s \in \{2, \cdots p\}$; $c_{j,j+1} > 0$, $c_{j+1,j} > 0(j = 1, 2, \cdots q-1)$, 若:

(1) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j \ge 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1}u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12}u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$$0 < \sigma_j < \frac{(1-c_{j+1,j+1})(c_{j,j-1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j-1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j-1})+c_{j+1,j-1}(c_{j,j+1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j+1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j+1})}{c_{j,j-1}\Omega_j},$$

$$0<\tau_{j+1}<\frac{(1-c_{j-1,j-1})(c_{j,j+1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j+1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j+1})+c_{j-1,j+1}(c_{j,j-1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j-1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j-1})}{c_{j,j+1}\Omega_j},$$

其中

$\Omega_j = (1 - c_{j-1,j-1})(1 - c_{j+1,j+1}) - c_{j+1,j-1}c_{j-1,j+1}$, $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(2) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j < 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1}u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12}u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$\sigma_j > 0$, $\tau_{j+1} > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(3) 当 $c_{jj} \ge 1$ 时, $\sigma_j > 0$, $\tau_j > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(T_{\omega\gamma}) < 1.$$

证明. 通过假设, 易证 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}$ 和 $T_{\omega\gamma}$ 是非负不可约矩阵. 由引理 1 可知, 存在一个正向量 x, 使得

$$T_{\omega\gamma}x = \lambda x. \tag{4.1}$$

其中 $\lambda = \rho(T_{\omega\gamma})$. 由 (4.1) 式, 我们可得到以下式子:

$$\left\{(1-\omega)I + (\omega-\gamma)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix} + \omega\begin{bmatrix} B & -U \\ 0 & C \end{bmatrix}\right\}x = \lambda\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma L & I \end{bmatrix}x,$$

$$\omega Hx = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma L & I \end{bmatrix}(I - T_{\omega\gamma})x = (1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma L & I \end{bmatrix}x.$$

显然 $\lambda \ne 1$, 否则 H 是奇异的, 这与假设相矛盾.

通过计算, 有

$$
\begin{aligned}
&\widehat{T}_{\omega\gamma 1}x-\lambda x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)\,I+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}\right\}x-\lambda x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)\,I+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{-\omega I+\omega\begin{bmatrix} 0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\omega I+\widehat{B}_1 & -\omega\widehat{U}_1\\ -\omega\widehat{L}_1 & -\omega I+\omega\widehat{C}_1\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\omega I+\omega B-\omega S_1\,(I-B) & -\omega U-\omega S_1U\\ -\omega K_1\,(I-B)-\omega V_1L-\omega L & -\omega I+\omega C-\omega K_1U-\omega V_1\,(I-C)\end{bmatrix}\right.\\
&\left.+\,(1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\omega S_1\,(I-B) & -\omega S_1U\\ -\omega K_1\,(I-B)-\omega V_1L & -\omega K_1U-\omega V_1\,(I-C)\end{bmatrix}\right.\\
&\left.-\omega H+(1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ -K_1 & -V_1\end{bmatrix}\omega H+(1-\lambda)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ \gamma\left(\widehat{L}_1-L\right) & 0\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\lambda)\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ -K_1 & -V_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma L & I\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ \gamma\left(\widehat{L}_1-L\right) & 0\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\lambda)\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ -K_1-\gamma V_1L & -V_1\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ \gamma K_1\,(I-B)+\gamma V_1L & 0\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\ (1-\lambda)\begin{bmatrix} I & 0\\ -\gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ -K_1+\gamma K_1(I-B) & -V_1\end{bmatrix}x\\
=&\ (1-\lambda)\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ \gamma K_1(I-B)(I+S_1)+\gamma(I+V_1)LS_1-K_1 & -V_1\end{bmatrix}x.
\end{aligned}
$$

因为 $\alpha_s,\ \beta_s,\ \sigma_j,\ \tau_j>0$, 并且 $S_1>0$, $K_1>0$ 和 $V_1>0$. 因此, 我们可以得到:

$$
\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ \gamma K_1(I-B)(I+S_1)+\gamma(I+V_1)LS_1-K_1 & -V_1\end{bmatrix}\leq 0,
$$

又因为

$$
\begin{bmatrix}-S_1 & 0\\ \gamma K_1(I-B)(I+S_1)+\gamma(I+V_1)LS_1-K_1 & -V_1\end{bmatrix}\neq 0.
$$

所以当 $\lambda < 1$ 时, 有 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}x - \lambda x < 0$, 由引理 2 可知 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(T_{\omega\gamma}) < 1$ 成立.

类似的, 对于预处理矩阵 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$, 我们也能得到如下比较结果.

定理 2. 设 $T_{\omega\gamma}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$ 分别是预 GAOR 方法 (1.3) 和预 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 的中 H 为不可约矩阵, 且满足 $L \le 0$, $U \le 0$, $B \ge 0$, $C \ge 0$, $0 < \omega \le 1$, $0 \le \gamma < 1$, $b_{s1} > 0$, $b_{1s} > 0 (s = 2, \cdots p)$, $b_{11} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $\beta_s > 0$; $c_{j1} > 0$, $c_{1j} > 0 (j = 2, \cdots q)$, 若:

(1) 当 $0 \le c_{11} < 1$, $0 < \sigma_j < \frac{c_{j1} + l_{j1}u_{11}}{c_{21}(1 - c_{11})}$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 或者 $c_{11} \ge 1$, $\sigma_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$;

(2) $0 \le c_{jj} < 1$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 有

$$0 < \tau_j < \frac{c_{1j} + \tau_2 c_{12} c_{2j} + \cdots + \tau_{j-1} c_{1,j-1} c_{j-1,j} + \tau_{j+1} c_{1,j+1} c_{j+1,j} + \cdots + \tau_q c_{1q} c_{qj} + l_{12} u_{2j} + \cdots + l_{1p} u_{pj}}{c_{1j}(1 - c_{jj})},$$

或者 $c_{jj} \ge 1$, $\tau_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 2}) < \rho(T_{\omega\gamma}).$$

下一步, 我们给出由 GAOR 方法 (3.5) 所确定的新方法和由 GAOR 方法 (3.3) 所确定的 GAOR 方法之间的比较定理.

定理 3. 设 $T^*_{\omega\gamma 1}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}$ 分别是 GAOR 方法 (3.3) 和 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 中 H 为不可约矩阵, 并且满足 $L \le 0$, $U \le 0$, $B \ge 0$, $C \ge 0$, $0 < \omega \le 1$, $0 \le \gamma < 1$, $b_{s,s+1} > 0$, $b_{s+1,s} > 0 (s = 1, 2, \cdots p-1)$, $b_{ss} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $\beta_s > 0$, 其中 $s \in \{2, \cdots p\}$; $c_{j,j+1} > 0$, $c_{j+1,j} > 0 (j = 1, 2, \cdots q-1)$, 若：

(1) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j \ge 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1}u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12}u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$$0 < \sigma_j < \frac{(1-c_{j+1,j+1})(c_{j,j-1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j-1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j-1})+c_{j+1,j-1}(c_{j,j+1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j+1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j+1})}{c_{j,j-1}\Omega_j},$$

$$0<\tau_{j+1}<\frac{(1-c_{j-1,j-1})(c_{j,j+1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j+1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j+1})+c_{j-1,j+1}(c_{j,j-1}+l_{j,j-1}u_{j-1,j-1}+l_{j,j+1}u_{j+1,j-1})}{c_{j,j+1}\Omega_j},$$

其中 $\Omega_j = (1 - c_{j-1,j-1})(1 - c_{j+1,j+1}) - c_{j+1,j-1}c_{j-1,j+1}$, 其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(2) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j < 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1}u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12}u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$\sigma_j > 0$, $\tau_{j+1} > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(3) 当 $c_{jj} \ge 1$ 时, $\sigma_j > 0$, $\tau_j > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(T^*_{\omega\gamma 1}).$$

证明. 通过假设, 易证 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}$ 和 $T^*_{\omega\gamma 1}$ 是非负不可约矩阵. 由引理 1 可知, 存在一个正向量 x, 使得

$$T^*_{\omega\gamma 1}x = \mu x. \tag{4.2}$$

其中 $\mu=\rho(T^*_{\omega\gamma 1})$. 由 (4.2) 可得

$$\left\{(1-\omega)I+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -L_1^* & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}B_1^* & -U_1^*\\ 0 & C_1^*\end{bmatrix}\right\}x=\mu\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma L_1^* & I\end{bmatrix}x,$$

$$\omega P_1^* Hx=\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma L_1^* & I\end{bmatrix}(I-T^*_{\omega\gamma 1})x=(1-\mu)\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma L_1^* & I\end{bmatrix}x.$$

显然 $\lambda\neq 1$, 否则 H 是奇异的, 这与假设相矛盾.

通过计算, 有

$$\begin{aligned}
&\widehat{T}_{\omega\gamma 1}x-\mu x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)\,I+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}\right\}-\mu x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)\,I+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}-\mu\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{-\omega I+\omega\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\widehat{L}_1 & 0\end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix}\widehat{B}_1 & -\widehat{U}_1\\ 0 & \widehat{C}_1\end{bmatrix}+(1-\mu)\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\omega I+\widehat{B}_1 & -\omega\widehat{U}_1\\ -\omega\widehat{L}_1 & -\omega I+\omega\widehat{C}\end{bmatrix}+(1-\mu)\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\omega I+\omega B-\omega S_1\,(I-B) & -\omega U-\omega S_1 U\\ -\omega K_1\,(I-B)-\omega V_1 L-\omega L & -\omega I+\omega C-\omega K_1 U-\omega V_1\,(I-C)\end{bmatrix}\right.\\
&\left.+(1-\mu)\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\omega K_1\,(I-B) & -\omega K_1 U\end{bmatrix}-\omega P_1^* H+(1-\mu)\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ -K_1 & 0\end{bmatrix}\omega H+(1-\mu)\begin{bmatrix}0 & 0\\ \gamma\left(\widehat{L}_1-L_1^*\right) & 0\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma\widehat{L}_1 & I\end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\lambda)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -K_1 & 0\end{bmatrix}+(1-\mu)\begin{bmatrix}0 & 0\\ \gamma K_1\,(I-B) & 0\end{bmatrix}\right\}x\\
=&\ (1-\lambda)\begin{bmatrix}0 & 0\\ -K_1 & 0\end{bmatrix}x+(1-\mu)\begin{bmatrix}0 & 0\\ \gamma K_1\,(I-B) & 0\end{bmatrix}x.
\end{aligned}$$

由条件知 $K_1>0$. 因此, 我们可以得到:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -K_1 & 0\end{bmatrix}\leq 0,\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ \gamma K_1\,(I-B) & 0\end{bmatrix}\leq 0$$

又因为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma K_1 (I-B) & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

则当 $\lambda < 1,\ \mu < 1$ 时, 有 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1} - \mu x < 0$, 由引理 2 可知 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(T^*_{\omega\gamma 1}) < 1$ 成立.

类似的, 对于预处理矩阵 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$, 我们也能得到如下收敛定理.

定理 4. 设 $T^*_{\omega\gamma 2}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$ 分别是 GAOR 方法 (3.3) 和 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 中 H 为不可约矩阵, 且满足 $L \le 0$, $U \le 0$, $B \ge 0$, $C \ge 0$, $0 < \omega \le 1$, $0 \le \gamma < 1$, $b_{s1} > 0$, $b_{1s} > 0 (s = 2, \cdots p)$, $b_{11} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $\beta_s > 0$; $c_{j1} > 0$, $c_{1j} > 0 (j = 2, \cdots q)$, 若:

(1) 当 $0 \le c_{11} < 1$, $0 < \sigma_j < \frac{c_{j1} + l_{j1}u_{11}}{c_{21}(1-c_{11})}$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 或者 $c_{11} \ge 1$, $\sigma_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$;

(2) $0 \le c_{jj} < 1$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 有

$$0 < \tau_j < \frac{c_{1j} + \tau_2 c_{12} c_{2j} + \cdots + \tau_{j-1} c_{1,j-1} c_{j-1,j} + \tau_{j+1} c_{1,j+1} c_{j+1,j} + \cdots + \tau_q c_{1q} c_{qj} + l_{12} u_{2j} + \cdots + l_{1p} u_{pj}}{c_{1j}(1-c_{jj})},$$

或者 $c_{jj} \ge 1$, $\tau_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 2}) < \rho(T^*_{\omega\gamma 2}).$$

最后, 我们给出由 GAOR 方法 (3.5) 所确定的新方法和由 GAOR 方法 (3.1) 所确定的 GAOR 方法之间的比较定理.

定理 5. 设 $\overline{T}_{\omega\gamma 1}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1}$ 分别是 GAOR 方法 (3.1) 和 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 中 H 为不可约矩阵, 并且满足 $L \le 0$, $U \le 0$, $B \ge 0$, $C \ge 0$, $0 < \omega \le 1$, $0 \le \gamma < 1$, $b_{s,s+1} > 0$, $b_{s+1,s} > 0 (s = 1, 2, \cdots p-1)$; $c_{j,j+1} > 0$, $c_{j+1,j} > 0 (j = 1, 2, \cdots q-1)$, 若:

(1) 当 $0 \le b_{ss} < 1$, $\Delta_s \ge 0$ 时, 有 $0 < \alpha_2 < \frac{1}{1-b_{22}}$, $0 < \beta_p < \frac{1}{1-b_{p-1,p-1}}$,

$$0 < \alpha_{s+1} < \frac{b_{s,s-1} b_{s-1,s+1} + b_{s,s+1}(1 - b_{s-1,s-1})}{b_{s,s+1}\Delta_s},$$

$$0 < \beta_s < \frac{b_{s,s-1}(1 - b_{s+1,s+1}) + b_{s,s+1} b_{s+1,s-1}}{b_{s,s-1}\Delta_s},$$

其中 $s \in \{2, \cdots p-1\}$;

(2) 当 $0 \le b_{ss} < 1$, $\Delta_s < 0$ 时, 有 $0 < \alpha_2 < \frac{1}{1-b_{22}}$, $0 < \beta_p < \frac{1}{1-b_{p-1,p-1}}$, $\alpha_{s+1} > 0$, $\beta_s > 0$, 其中 $s \in \{2, \cdots p-1\}$;

(3) 当 $b_{ss} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $\beta_s > 0$, 其中 $s \in \{2, \cdots p\}$;

(4) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j \ge 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1} u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12} u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$$0 < \sigma_j < \frac{(1-c_{j+1,j+1})(c_{j,j-1} + l_{j,j-1} u_{j-1,j-1} + l_{j,j+1} u_{j+1,j-1}) + c_{j+1,j-1}(c_{j,j+1} + l_{j,j-1} u_{j-1,j+1} + l_{j,j+1} u_{j+1,j+1})}{c_{j,j-1}\Omega_j},$$

$$0 < \tau_{j+1} < \frac{(1-c_{j-1,j-1})(c_{j,j+1} + l_{j,j-1} u_{j-1,j+1} + l_{j,j+1} u_{j+1,j+1}) + c_{j-1,j+1}(c_{j,j-1} + l_{j,j-1} u_{j-1,j-1} + l_{j,j+1} u_{j+1,j-1})}{c_{j,j+1}\Omega_j},$$

其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(5) 当 $0 \le c_{jj} < 1$, $\Omega_j < 0$ 时, 有

$$0 < \sigma_q < \frac{c_{q,q-1} + l_{q,q-1}u_{q-1,q-1}}{c_{q,q-1}(1 - c_{q-1,q-1})},\ 0 < \tau_2 < \frac{c_{12} + l_{12}u_{22}}{c_{12}(1 - c_{22})},$$

$\sigma_j > 0$, $\tau_{j+1} > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$;

(6) 当 $c_{jj} \ge 1$, $\sigma_j > 0$, $\tau_j > 0$, 其中 $j \in \{2, \cdots q\}$,

其中

$\Delta_s = (1 - b_{s-1,s-1})(1 - b_{s+1,s+1}) - b_{s+1,s-1}b_{s-1,s+1}$, 其中 $s \in \{2, \cdots p-1\}$,

$\Omega_j = (1 - c_{j-1,j-1})(1 - c_{j+1,j+1}) - c_{j+1,j-1}c_{j-1,j+1}$, 其中 $j \in \{2, \cdots q-1\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}).$$

证明. 通过文献 [17] 的相关证明, 我们可以得到: 当 $\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) < 1$, 有 $\rho(T^*_{\omega\gamma 1}) < \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1})$; 当 $\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) > 1$, 有 $\rho(T^*_{\omega\gamma 1}) > \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1})$. 又因为在定理 3 中, 我们已经证明出了: 当 $\lambda < 1$, $\mu < 1$ 时, 有 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1} - \mu x < 0$, 由引理 2 可知 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(T^*_{\omega\gamma 1}) < 1$ 成立; 当 $\lambda > 1, \mu > 1$ 时, 有 $\widehat{T}_{\omega\gamma 1} - \mu x > 0$, 由引理 2 可知 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) > \rho(T^*_{\omega\gamma 1}) > 1$ 成立. 因此我们可以得到: 当 $\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) < 1$, 有 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) < \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) < 1$ 成立; 当 $\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) > 1$, 有 $\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1}) > \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1}) > 1$ 成立.

相似的, 对于预处理矩阵 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$, 我们也能得到如下收敛定理.

定理 6. 设 $\overline{T}_{\omega\gamma 2}$ 和 $\widehat{T}_{\omega\gamma 2}$ 分别是 GAOR 方法 (3.1) 和 GAOR 方法 (3.5) 的迭代矩阵. 假设 (1.2) 中 H 为不可约矩阵, 且满足 $L \le 0$, $U \le 0$, $B \ge 0$, $C \ge 0$, $0 < \omega \le 1$, $0 \le \gamma < 1$, $b_{s1} > 0$, $b_{1s} > 0 (s = 2, \cdots p)$; $c_{j1} > 0$, $c_{1j} > 0 (j = 2, \cdots q)$, 若:

(1) 当 $0 \le b_{11} < 1$, $0 < \beta_s < \frac{1}{1-b_{11}}$, $s \in \{2, \cdots p\}$, 或者 $b_{11} \ge 1$, $\beta_s > 0$, $s \in \{2, \cdots p\}$;

(2) 当 $0 \le b_{ss} < 1$, $s \in \{2, \cdots p\}$, 有

$$0 < \alpha_s < \frac{b_{1s} + \alpha_2 b_{12}b_{2s} + \cdots + \alpha_{s-1}b_{1,s-1}b_{s-1,s} + \alpha_{s+1}b_{1,s+1}b_{s+1,s} + \cdots + \alpha_p b_{1p}b_{ps}}{b_{1s}(1 - b_{ss})},$$

或者 $b_{ss} \ge 1$, $\alpha_s > 0$, $s \in \{2, \cdots p\}$;

(4) 当 $0 \le c_{11} < 1$, $0 < \sigma_j < \frac{1}{1-c_{11}}$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 或者 $c_{11} \ge 1$, $\sigma_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$;

(5) $0 \le c_{jj} < 1$, $j \in \{2, \cdots q\}$, 有

$$0 < \tau_j < \frac{c_{1j} + \tau_2 c_{12}c_{2j} + \cdots + \tau_{j-1}c_{1,j-1}c_{j-1,j} + \tau_{j+1}c_{1,j+1}c_{j+1,j} + \cdots + \tau_q c_{1q}c_{qj} + l_{12}u_{2j} + \cdots + l_{1p}u_{pj}}{c_{1j}(1 - c_{jj})},$$

或者 $c_{jj} \ge 1$, $\tau_j > 0$, $j \in \{2, \cdots q\}$,

则有

$$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 2}) < \rho(\overline{T}_{\omega\gamma 2}).$$

5. 数值算例

现在, 我们考虑两个算例, 从而来解释如上给出的理论结果.

例 1. 由 (1.2) 给出的系数矩阵 H 的定义如下:

$$H = \begin{bmatrix} I - B & U \\ L & I - C \end{bmatrix}$$

其中 $B=(b_{ij})_{p\times p}$, $C=(c_{ij})_{q\times q}$, $L=(l_{ij})_{q\times p}$, $U=(u_{ij})_{p\times q}$, 并且

$$\begin{aligned}
b_{ii} &= \frac{1}{10(i+1)}, \quad i=1,2,\cdots p,\\
b_{ij} &= \frac{1}{30}-\frac{1}{30j+i}, \quad i<j, i=1,2,\cdots p-1, j=2,\cdots p,\\
b_{ij} &= \frac{1}{30}-\frac{1}{30(i-j+1)+i}, \quad i>j, i=2,\cdots p, j=1,2,\cdots p-1,\\
c_{ii} &= \frac{1}{10(p+i+1)}, \quad i=1,2,\cdots n-p,\\
c_{ij} &= \frac{1}{30}-\frac{1}{30(p+j)+p+i}, \quad i<j, i=1,2,\cdots n-p+1, j=2,\cdots n-p,\\
c_{ij} &= \frac{1}{30}-\frac{1}{30(i-j+1)+p+i}, \quad i>j, i=2,\cdots n-p, j=1,2,\cdots n-p-1,\\
l_{ij} &= \frac{1}{30(p+i-j+1)+p+i}-\frac{1}{30}, \quad i=1,2,\cdots n-p, j=1,2,\cdots p,\\
u_{ij} &= \frac{1}{30(p+j)+i}-\frac{1}{30}, \quad i=1,2,\cdots p, j=1,2,\cdots n-p.
\end{aligned}$$

表 1 列出了相应的迭代矩阵的谱半径, 其中参数 ω, γ, n, p 均为随机选择, 且满足定理 1–6 中的条件, 我们令系数 $\alpha_i=\beta_i=\delta_i=\tau_i=0.5$, 所有的计算结果都是在 MATLAB 7 的帮助下获得的.

表 1 GAOR 迭代矩阵和预处理 GAOR 迭代矩阵的谱半径比较

n	p	ω	γ	$\rho(T_{\omega\gamma})$	$\rho(\overline{T}_{\omega\gamma1})$	$\rho(\overline{T}_{\omega\gamma2})$	$\rho(T^*_{\omega\gamma1})$	$\rho(T^*_{\omega\gamma2})$	$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma1})$	$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma2})$
10	5	0.9	0.9	0.2729	0.2672	0.2680	0.2643	0.2630	0.2565	0.2556
15	5	0.9	0.8	0.4158	0.4141	0.4138	0.4078	0.4071	0.4034	0.4004
20	10	0.9	0.9	0.5360	0.5326	0.5320	0.5286	0.5277	0.5212	0.5214
20	10	0.8	0.7	0.6065	0.6038	0.6033	0.6006	0.5999	0.5929	0.5932
30	20	0.7	0.6	0.9082	0.9072	0.9071	0.9067	0.9065	0.9050	0.9044

从表 1 我们可以知道, 这些数值结果和定理 1–6 的结论是一致的.

例 2. [18, 19] 考虑到在具有齐次 *Dirichlet* 边界条件的区域 Ω 上的 $N\times N$ 内节点 $(n=N^2)$ 的均匀网格的二维凸扩散方程

$$-(u_{xx}+u_{yy})+u_x+2u_y=f(x,y),$$

其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$. 然后利用二阶中心差分求解二阶微分和一阶微分, 得到了 n 阶线性方程组, 所得到的系数矩阵 H 的形式如下:

$$H=I\otimes P+Q\otimes I,$$

其中 $\otimes$ 是 Kronecker 积,

$$P=\mathrm{tridiag}(-\frac{2+h}{8},\ 1,\ -\frac{2-h}{8}),\quad Q=\mathrm{tridiag}(-\frac{1+h}{4},\ 0,\ -\frac{1-h}{4}),$$

且 P 和 Q 都是 $N\times N$ 的三对角矩阵, 步长 $h=\frac{1}{N+1}$. 这儿的 H 可以表示为 (1.2) 的形式, 其中 $B,\ C\geq 0,\ L,\ U\leq 0$.

表 2 列出了相应的迭代矩阵的谱半径, 其中参数 $\omega=1,\ \gamma=0.55,\ n=N^2,\ p=\frac{N}{2}+7$, 且满足定理 1–6 中的条件, 我们令系数 $\alpha_i=\beta_i=\delta_i=\tau_i=0.5$, 所有的计算结果都是在 MATLAB 7 的帮助下获得的.

表 2 GAOR 迭代矩阵和预处理 GAOR 迭代矩阵的谱半径比较

N	p	$\rho(T_{\omega\gamma})$	$\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 1})$	$\rho(\overline{T}_{\omega\gamma 2})$	$\rho(T^*_{\omega\gamma 1})$	$\rho(T^*_{\omega\gamma 2})$	$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 1})$	$\rho(\widehat{T}_{\omega\gamma 2})$
8	11	0.9353010889	0.9348208562	0.9352730808	0.9202083811	0.9346935768	0.9202083811	0.9345029186
12	13	0.9690689757	0.9690187346	0.9690673309	0.9615489758	0.9690486793	0.9614648514	0.9690455627
16	15	0.9818901488	0.9818765659	0.9818900316	0.9774360115	0.981889914	0.9774136578	0.9818897794
24	19	0.9916157484	0.9916138515	0.9916157429	0.9895358841	0.9916155803	0.9895358841	0.9916155433

从表 2 我们也可以知道, 这些数值结果和定理 1–6 的结论是一致的.

6. 总　结

在本文中, 基于文献 [9, 17], 采用文献 [6] 的思想, 我们提出了一类新的预处理子用于加速求解块线性系统 (1.2) 的 GAOR 方法. 所得比较定理表明, 当这些方法收敛时, 本文所提出的预处理 GAOR 方法有更好的收敛性. 数值例子也验证了所得结论.

此外, 我们也可以考虑预处理子中 K_i 的如下参数形式:

(1). 当 $q<p$ 时,

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & -\delta_2 l_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta_2 l_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -\delta_q l_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\eta_q l_{q,q-1} & 0 & -\delta_{q+1} l_{q,q+1} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

(2). 当 $q=p$ 时,

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & -\delta_2 l_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ -\eta_2 l_{21} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -\delta_q l_{q-1,q} \\ 0 & 0 & \cdots & -\eta_q l_{q,q-1} & 0 \end{bmatrix},$$

(3). 当 $q > p$ 时,

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_2 l_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ -\eta_2 l_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -\delta_p l_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & -\eta_p l_{p,p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\eta_{p+1} l_{p+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_2 l_{12} & \cdots & -\delta_p l_{1p} \\ -\eta_2 l_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_q l_{q1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

为了简便运算, 我们只考虑 $p = q$ 的情况, 则有:

$$\widehat{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} + \tau_2 c_{12} c_{21} + \delta_2 l_{12} u_{21} & \cdots & c_{1q} + \tau_2 c_{12} c_{2q} + \delta_2 l_{12} u_{2q} \\ c_{21} + \tau_3 c_{23} c_{31} - \sigma_2 c_{21}\left(1 - c_{11}\right) + \eta_2 l_{21} u_{11} + \delta_2 l_{23} u_{31} & \cdots & c_{2q} + \tau_3 c_{23} c_{3q} + \sigma_2 c_{21} c_{1q} + \eta_q l_{21} u_{1q} + \delta_2 l_{23} u_{3q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_2 \\ c_{q1} + \sigma_q c_{q-1,1} c_{q,q-1} + \eta_q l_{q,q-1} u_{q-1,1} & \cdots & c_{qq} + \sigma_q c_{q,q-1} c_{q-1,1} + \eta_q l_{q,q-1} u_{q-1,q} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} a_3 & \cdots & a_4 \\ c_{21} - \sigma_2 c_{21}\left(1 - c_{11}\right) + \eta_2 l_{21} u_{11} & \cdots & c_{2q} + \sigma_2 c_{21} c_{1q} + \eta_2 l_{21} u_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} - \sigma_q c_{q1}\left(1 - c_{11}\right) + \eta_q l_{q1} u_{11} & \cdots & c_{qq} + \sigma_q c_{q1} c_{1q} + \eta_q l_{q1} u_{1q} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{L}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} + \tau_2 c_{12} l_{21} + \delta_2 l_{12} b_{21} & \cdots & l_{1q} + \tau_2 c_{12} l_{2q} + \delta_2 l_{12} b_{2q} \\ l_{21} + \tau_3 c_{23} l_{31} - \eta_2 l_{21}\left(1 - b_{11}\right) + \sigma_2 c_{21} l_{11} + \delta_3 l_{23} b_{31} & \cdots & c_{2q} + \tau_3 c_{23} c_{3q} + \sigma_2 c_{21} c_{1q} + \eta_q l_{21} u_{1q} + \delta_2 l_{23} u_{3q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_2 \\ \eta_q b_{q-1,1} l_{q,q-1} + \sigma_q c_{q,q-1} l_{q-1,1} & \cdots & \sigma_q c_{q,q-1} l_{q-1,1} + \eta_q l_{q,q-1} b_{q-1,q} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{L}_2 = \begin{bmatrix} b_3 & \cdots & b_4 \\ l_{21} - \eta_2 l_{21}\left(1 - b_{11}\right) + \sigma_2 c_{21} l_{11} & \cdots & l_{2p} + \eta_2 l_{21} b_{1p} + \sigma_2 c_{21} l_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{q1} - \eta_q l_{q1}\left(1 - b_{11}\right) + \sigma_q c_{q1} l_{11} & \cdots & l_{qp} + \eta_q l_{q1} b_{1p} + \sigma_q c_{q1} l_{1p} \end{bmatrix},$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_1 &= c_{q-1,1} + \tau_q c_{q-1,q} c_{q1} + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} c_{q-2,1} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,1} + \delta_q l_{q-1,q} u_{q1}, \\
a_2 &= c_{q-1,q} - \tau_q c_{q-1,q} (1 - c_{qq}) + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} c_{q-2,q} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,q} + \delta_q l_{q-1,q} u_{qq}, \\
a_3 &= c_{11} + \tau_2 c_{12} c_{21} + \cdots + \tau_q c_{1q} c_{q1} + \delta_2 l_{12} u_{21} + \cdots + \delta_p l_{1p} u_{p1}, \\
a_4 &= c_{1q} + \tau_2 c_{12} c_{2q} + \cdots - \tau_q (1 - c_{qq}) + \delta_2 l_{12} u_{2q} + \cdots + \delta_p l_{1p} u_{pq}, \\
b_1 &= c_{q-1,1} + \tau_q c_{q-1,q} c_{q1} + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} c_{q-2,1} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,1} + \delta_q l_{q-1,q} u_{q1}, \\
b_2 &= c_{q-1,q} - \tau_q c_{q-1,q} (1 - c_{qq}) + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} c_{q-2,q} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,q} + \delta_q l_{q-1,q} u_{qq}, \\
b_3 &= \delta_2 l_{12} b_{21} + \cdots + \delta_p l_{1p} b_{p1} + l_{11} + \tau_2 c_{12} l_{21} + \cdots + \tau_q c_{1q} l_{q1}, \\
b_4 &= \delta_2 l_{12} b_{2p} + \cdots - \delta_p l_{1p} (1 - b_{pp}) + l_{1p} + \tau_2 c_{12} l_{2p} + \cdots + \tau_q c_{1q} l_{qp},
\end{aligned}
$$

当 $\widehat{L}_1$ 和 $\widehat{C}_1$ 中的 σ_i, τ_i, δ_i 和 η_i 满足下列四个不等式时, 也可以得到对应的比较结果.

$$\eta_{q-1} b_{q-2,q} l_{q-1,q-2} - \delta_q l_{q-1,q} (1 - b_{qq}) + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} l_{q-2,q} + \tau_q c_{q-1,q} l_{qq} + l_{q-1,q} < 0,$$

$$\delta_q l_{q-1,q} b_{q,q-2} - \eta_{q-1} (1 - b_{q-2,q}) l_{q-1,q-2} + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} l_{q-2,q-2} + \tau_q c_{q-1,q} l_{q,q-2} + l_{q-1,q-2} < 0,$$

$$c_{q-1,q} - \tau_q c_{q-1,q} (1 - c_{qq}) + \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} c_{q-2,q} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,q} + \delta_q l_{q-1,q} u_{qq} > 0,$$

$$c_{q-1,q-2} - \sigma_{q-1} c_{q-1,q-2} (1 - c_{q-2,q-2}) + \tau_q c_{q-1,q} c_{q,q-2} + \eta_{q-1} l_{q-1,q-2} u_{q-2,q-2} + \delta_q l_{q-1,q} u_{q,q-2} > 0,$$

同理也可以得到 $\widehat{L}_2$ 和 $\widehat{C}_2$ 中 σ_i, τ_i, δ_i 和 η_i 所满足的条件使得相应的比较结论成立.

参 考 文 献

[1] Berman A, Plemmoms R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. Academic Press, New York, 1979.

[2] Chen K. Matrix Preconditioning Techniques and Applications. Cambridge University Press, 2005.

[3] Darvishi M T, Hessari P. On convergence of the generalized AOR method for linear systems with diagonally dominant coefficient matrices[J]. Appl. Math. Comput., 2006, 176: 128–133.

[4] Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method[J]. Math. Comput., 1978, 32: 149–157.

[5] Miao S X. On preconditioned GAOR methods for weighted linear least squares problems[J]. J. Comput. Anal. Appl., 2015, 18: 371–382.

[6] Miao S X, Luo Y H, Wang G B. Two new preconditioned GAOR methods for weighted linear least squares problems[J]. Appl . Math. Comput., 2018, 324: 93–104.

[7] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Springer, Berlin, 2000.

[8] Shen H, Shao X, Zhang T. Preconditioned iterative methods for solving weighted linear least squares problems[J]. Appl. Math. Mech., 2012, 33(3): 375–384.

[9] Wang G, Du Y, Tan F. Comparison results on preconditioned GAOR methods for weighted linear least squares problems[J]. J. Appl. Math., 2012, 9.

[10] Wang G, Wang T, Tan F. Some results on preconditioned GAOR methods[J]. Appl. Math. Comput., 2013, 219: 5811–5816.

[11] Young D M. Iterative Solution of Large Linear Systems[M]. Academic Press, NewYork, 1971.

[12] Yuan J Y, Jin X Q, Convergence of the generalized AOR method[J]. Appl. Math. Comput., 1999, 99: 35–46.

[13] Yuan J Y. Numerical methods for generalized least squares problem[J]. J. Comput. Appl. Math., 1996, 66: 571–584.

[14] Yuan J Y, Iudem A N. SOR-type methods for generalized least squares problems[J]. Acta Math. Appl. Sin., 2000, 16: 130–139.

[15] Yun J H. Comparison results on the preconditioned GAOR method for generalized least squares problems[J]. Int. J. Comput. Math., 2012, 89: 2094–2105.

[16] Zhou X, Song Y, Wang L, Liu Q. Preconditioned GAOR methods for solving weighted linear least squares problems[J]. J. Comput.Appl. Math., 2009, 224: 242–249.

[17] Huang Z G, Wang L G, Xu Z, Cui J J. Some new preconditioned generalized AOR methods for solving weighted linear least squares problems[J]. Comp. Appl. Math., 2018, 37: 415–438.

[18] Huang Z G, Xu Z, Lu Q, Cui J J. Some new preconditioned generalized AOR methods for generalized least-squares problems[J]. Comp. Appl. Math., 2015, 269: 87–104.

[19] Wu M J, Wang L, Song Y Z. Preconditioned AOR iterative method for linear systems[J]. Appl. Numer. Math., 2007, 57: 672–685.

A CLASS OF PRECONDITIONED GAOR METHODS FOR SOLVING WEIGHTED LINEAR LEAST-SQUARES PROBLEM

Wang Li

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, LanZhou 730070, China*)

Luo Yuhua

(*College of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

Wang Guangbin

(*Department of Mathematics, Qingdao Agricultural University, Qingdao 266109, China*)

Abstract

In this paper, a new type of preconditioners are proposed for accelerating the GAOR method, which are the preconditioned GAOR methods, for solving a class of block 2×2 linear systems arising from the weighted linear least-squares problem. Some comparison results are obtained, the comparison results show that the convergence rate of the proposed preconditioned GAOR methods are indeed better than those of the original GAOR method and the preconditioned GAOR methods, whenever the original GAOR method is convergent. Furthermore, effectiveness of the proposed methods is verified by numerical experiment.

Keywords: weighted linear least-squares problem; preconditioner; GAOR method; comparison theorems

2010 Mathematics Subject Classification: 65F15, 65F10