

非稳态奇异系数微分方程的时间间断时空有限元方法^{*1)}

何斯日古楞 李 宏 刘 洋 方志朝
(内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘 要

针对一类二维单轴奇异系数非稳态问题构造了一种时间间断时空有限元格式, 利用以 Radau 点为节点的 Lagrange 插值多项式的特性, 结合有限差分法和有限元法的技巧证明了格式的稳定性 and 有限元解的时间最大模、空间加权 $L^2(\Omega)$ - 模误差估计. 最后列举了一些数值试验结果, 验证了理论结果和格式的可行性.

关键词: 非稳态奇异系数微分方程; 时间间断时空有限元方法; 误差估计

MR (2010) 主题分类: 65M60, 65N30

1. 引 言

奇异系数方程广泛应用在热传导问题、离子体极化现象中的猝灭问题以及概率中描述布朗运动和随机过程等物理问题中^[1]. Arroyo, Bespalov 和 Heuer 在文 [2] 中研究了具有退化和奇异系数的二阶椭圆 Dirichlet 边值问题的有限元法, 并在加权 Sobolev 范数意义下证明了先验误差估计, 通过数值算例验证了理论分析结果. 后来, Bidwell, Hassell 和 Westphal^[3] 提出了具有退化和奇异系数的二阶椭圆 Dirichlet 边值问题的一种新型加权最小二乘有限元方法, 并讨论了适当加权 Sobolev 范数意义下的收敛性, 进一步通过数值算例对比了加权格式和未加权格式的收敛性, 从理论和实验说明加权格式能够消除污染效应且实现最优收敛阶. 国内, 陈传森在文 [4] 中利用 Green 函数证明了奇型两点边值问题有限元解的最大模误差估计超收敛性. 文 [5,6] 分别利用 Green 函数和 Nitsche 技巧及一种辅助函数分析了奇异系数两点边值问题对称有限元格式的最大模误差估计和未加权 $L^2(\Omega)$ - 模最优误差估计. 文 [7] 讨论了一维奇异抛物问题的混合有限元方法, 并在奇点附近, 利用变网格步长的处理手段有效地克服了方程奇异性和解的奇异行为对数值计算带来的困难, 得到了较好的数值模拟结果. 更多奇异系数微分方程问题的有限元法研究, 请参见文 [1] 及其参考文献. 近几年, 文 [8-11] 利用时空有限元法求解奇异抛物型方程问题, 并主要是利用文 [12] 的技巧, 即将有限差分 and 有限元方法相结合的技巧在加权时空模意义下证明了有限元解的最优收敛误差估计. 在此基础上, 本文将时

* 2018 年 7 月 2 日收到.

¹⁾ 基金项目: 国家自然科学基金 (11501311, 11661058, 11761053, 11701299), 内蒙古自然科学基金 (2017MS0107, 2018MS01020), 内蒙古自治区高等学校科学研究项目 (NJZZ18001) 和内蒙古草原英才, 内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划 (NJYT-17-A07) 资助项目.

间间断时空有限元法的应用进一步推广到二维单轴奇异系数非稳态问题^[1]

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{x_1^\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma_1 \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2)$, T 是给定常数, $u_0(x)$ 和 $f(x, t)$ 是充分光滑的已知函数, 有界区域 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的正方形区域:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\},$$

用 $\partial\Omega$ 记 Ω 的边界, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^2$, $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{(x_1, x_2) | x_1 = 0\}$, 显然, $\Gamma_1 = \partial\Omega / \Gamma_0$. 问题 (1.1) 的稳态形式可视为三维 Poisson 方程 $-\Delta u = f$ 的第一边值问题, 当求解区域和数据均满足轴对称条件时, 用柱坐标变换得到的结果^[1,8-10].

本文的基本框架: 第二节给出了一些加权 Sobolev 空间定义、时空格式及其 Radau 数值积分形式和相关引理; 第三节对格式进行了稳定性分析; 第四节利用 Radau 点处的 Lagrange 插值多项式特性, 结合有限差分法和有限元法的技巧证明了有限元解在时间最大模、空间加权 $L^2(\Omega)$ -模误差估计. 最后一节给出了一些数值试验.

2. 相关定义及格式构造

本文除了使用标准 Sobolev 空间^[13,14] 相关范数和内积定义以外, 还需如下加权函数空间及其内积和范数:

定义 1. 设 v 是定义在 Ω 上的可测函数, 则定义加权 $L^2(\Omega)$ 空间^[1]

$$L_\sigma^2(\Omega) = \left\{ v : \int_\Omega x_1^\sigma |v|^2 dx < \infty \right\},$$

其相应的范数定义为

$$\|v\|_\sigma = \left(\int_\Omega x_1^\sigma |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad v \in L_\sigma^2(\Omega),$$

其中 $x_1^\sigma > 0$ 是权函数.

定义 2. 定义加权 Sobolev 空间^[1]

$$H_\sigma^m(\Omega) = \left\{ v : \frac{d^j v}{dx^j} \in L_\sigma^2(\Omega), 0 \leq j \leq m \right\},$$

其相应的范数定义为

$$\|v\|_{m,\sigma} = \left(\sum_{j=0}^m \left\| \frac{d^j v}{dx^j} \right\|_\sigma^2 \right)^{1/2}, \quad \forall v \in H_\sigma^m(\Omega).$$

下面给出问题 (1.1) 的时间间断时空有限元格式. 为此, 首先对时间区间 $[0, T]$ 离散. 设 $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = T$, $I_n = (t^n, t^{n+1}]$, $n = 0, \dots, N-1$. $k_n = t^{n+1} - t^n$ 表示时间步长, $k = \max_n k_n$. 定义时空片 $Q^n := \Omega \times I_n$, 并在每个时空片 Q^n 内, 设 $\mathcal{T}_h^n = \{\tau\}$ 是空间区域 Ω

的一种拟一致剖分, h_τ 表示单元 τ 的长度, $h_n = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h^n} h_\tau$, $h = \max_n h_n$. 每个时空片 Q^n 的剖分可以不相同, 即, 在 $\mathcal{T}_h^n$ 和 $\mathcal{T}_h^{n-1}$ 在界面 $t = t^n$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) 上可以取不同的节点.

建立有限元空间. 记 $V_0^1(\Omega) = \{v | v \in H_\sigma^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\}$. 对每个时间片 I_n ($0 \leq n \leq N-1$) 内, 定义有限元空间 S_h^n 如下:

$$S_h^n = \{\chi \in V_0^1(\Omega) : \chi|_\tau \in P_r(\tau), \quad \tau \in \mathcal{T}_h^n\},$$

其中 $P_r(\tau)$ 表示单元 τ 上关于 x 的次数不超过 r 的多项式集合. 记 t^0 对应的空间为 S_h^{-1} . 为简单, 置 $S_h^{-1} = S_h^0$. 设 q 是一个给定的正整数, 令 V_{hk} 表示由分块多项式 $v : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的空间

$$V_{hk} = \left\{ v : v|_{I_n \times \Omega} = \sum_{j=0}^{q-1} t^j \psi_j(x), \quad \psi_j(x) \in S_h^n \right\},$$

则对 $\forall t \in I_n$, 函数 v 是 S_h^n 中关于 x 的次数不超过 r 的连续多项式, 而对 $\forall x \in \Omega$, v 是关于时间变量 t 的 $q-1$ 次分片多项式, 并且在时间剖分节点 t^n ($n = 1, \dots, N-1$) 处允许间断. 进一步, 定义 $V_{hk}^n = \{v|_{I_n \times \Omega} : v \in V_{hk}\}$.

问题 (1.1) 的时间间断时空有限元格式为: 求 $U \in V_{hk}$ 使得对 $n = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} (x_1^\sigma U^{n+1}, \phi^{n+1}) + \int_{I_n} [- (x_1^\sigma U, \phi_t) + (x_1^\sigma \nabla U, \nabla \phi)] dt \\ = (x_1^\sigma U^n, \phi^{n+}) + \int_{I_n} (x_1^\sigma f, \phi) dt, \quad \forall \phi \in V_{hk}^n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $\phi^{n+} = \lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \phi(x, t^n + s)$.

为利用文 [12] 所提出的有限元与 Lagrange 插值相结合的技术, 即在时间区间 I_n 上的 Radau 点为节点的 Lagrange 插值多项式及相应的高斯 Radau 积分准则和其高代数精度性质在弱的时空网格限制条件下对时空格式进行理论分析, 下面给出一些基本概念和引理.

定义 3. 设 $g(\tau) \in C^{2q-1}[0, 1]$, $q \geq 1$, 如果求积公式

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^q \omega_j g(\tau_j), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q = 1, \quad (2.2)$$

的代数精度达到 $2q-2$ 次, 则称式 (2.2) 为拉道 (Radau) 求积公式, 节点 τ_j 为 Radau 点. 因公式 (2.2) 中右端节点 $\tau_q = 1$ 为固定, Radau 求积公式也称为预先规定某些节点的 Gauss 型求积公式 [15].

对固定的整数 $q \geq 1$, 设 $\{\ell_i(\tau)\}_{i=1}^q$ 是以 Radau 点 $0 < \tau_1 < \dots < \tau_q = 1$ 为节点的 $q-1$ 次 Lagrange 插值多项式, 即

$$\ell_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^q \frac{(\tau - \tau_j)}{(\tau_i - \tau_j)},$$

通过线性变换 $t = t^n + \tau k_n$ 将区间 $[0, 1]$ 映射到区间 $\bar{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$, 有

$$\begin{aligned} t^{n,i} &= t^n + \tau_i k_n, \quad t^{n,q} = t^{n+1}, \quad \ell_{n,i}(t) = \ell_i(\tau), \quad t = t^n + \tau k_n, \\ w_{n,i} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \ell_{n,i}(t) dt = k_n \int_0^1 \ell_i(\tau) d\tau = k_n \omega_i, \quad i = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (2.3)$$

则区间 $\bar{I}_n$ 上的 Radau 积分公式:

$$\int_{I_n} g(t) dt \approx \sum_{j=1}^q w_{n,j} g(t^{n,j}). \quad (2.4)$$

注 1. Radau 积分方法适合近似计算定义在半开半闭区间上积分, 而这一点正好与间断时空有限元方法的基函数允许在时间剖分节点处间断的特点相符合.

设 $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ 是 $q \times q$ 阶矩阵, 使得

$$\mathcal{N}_{ij} = w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) = \omega_j \ell'_i(\tau_j), \quad \mathcal{M} = e_q e_q^T - \mathcal{N}, \quad e_q^T = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^q.$$

显然, $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 不依赖于 k_n , 且当 $\mathbf{Y} = (y^{n,1}, y^{n,2}, \dots, y^{n,q})^T \in \mathbb{R}^q$, 时

$$\mathbf{Y}^T \mathcal{M} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^q \delta_{qi} y^{n,q} y^{n,i} - \sum_{i,j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) y^{n,j} y^{n,i}.$$

引理 1. ^[12] 设对角阵 $D = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q\}$, 则矩阵 $\widetilde{\mathcal{M}} = D^{-1/2} \mathcal{M} D^{1/2}$ 正定, 即存在 $\lambda := \frac{1}{2} \min\{\frac{\omega_1}{\tau_1}, \dots, \frac{\omega_{q-1}}{\tau_{q-1}}, 1 + \omega_q\} > 0$, 使得

$$\mathbf{X}^T \widetilde{\mathcal{M}} \mathbf{X} \geq \lambda |\mathbf{X}|^2 = \lambda \sum_{i=1}^q x_i^2, \quad \forall \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_q)^T \in \mathbb{R}^q.$$

设 $\ell_{n,j}(t)$ 是区间 I_n 上以 Radau 点 $t^{n,j}$, $(1 \leq j \leq q)$ 为节点的 Lagrange 插值基函数, 则 $U|_{I_n}$ 可表示为:

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^q \ell_{n,j}(t) U^{n,j}, \quad U^{n,j} = U^{n,j}(x) \in S_h^n. \quad (2.5)$$

将表达式 (2.5) 代入 (2.1) 并取 $\phi = \ell_{n,i}(t)\psi$ ($\psi \in S_h^n$) 则 (2.1) 的 Radau 积分格式:

$$\begin{aligned} \delta_{qi}(x_1^\sigma U^{n,q}, \psi) - \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) (x_1^\sigma U^{n,j}, \psi) + k_n \omega_i (x_1^\sigma \nabla U^{n,i}, \nabla \psi) \\ = \ell_{n,i}(t^n) (x_1^\sigma U^n, \psi) + \int_{I_n} (x_1^\sigma f(t), \ell_{n,i}(t) \psi) dt, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. 稳定性分析

下面的理论分析中还需时空域上的加权 Sobolev 空间及其相关范数定义.

定义 4. 有限维向量空间 $(L_\sigma^2(\Omega))^q$ 上定义范数

$$|||\Psi|||_\sigma = \left(\sum_{i=1}^q ||\psi_i||_\sigma^2 \right)^{1/2}, \quad \Psi = (\psi_1, \dots, \psi_q)^T, \quad \psi_i \in L_\sigma^2(\Omega).$$

定义 5. 设 ℓ, m 为非负整数, 则加权 Sobolev 空间 $H^\ell(J; H_\sigma^m(\Omega))$ 和 $L^\infty(J; H_\sigma^m(\Omega))$ 分别定义为

$$\begin{aligned} H^\ell(J; H_\sigma^m(\Omega)) &= \{u \in H_\sigma^m(\Omega) : \int_J \sum_{i=0}^\ell \left\| \frac{d^i}{dt^i} u(x, t) \right\|_{m, \sigma}^2 dt < \infty\}, \\ L^\infty(J; H_\sigma^m(\Omega)) &= \{u \in H_\sigma^m(\Omega) : \text{ess sup}_J \|u(x, t)\|_{m, \sigma} < \infty\}, \end{aligned}$$

并赋予范数

$$\|u\|_{H^\ell(J; H_\sigma^m(\Omega))} = \left(\int_J \sum_{i=0}^{\ell} \left\| \frac{d^i}{dt^i} u(x, t) \right\|_{m, \sigma}^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{L^\infty(J; H_\sigma^m(\Omega))} = \max_J \|u(x, t)\|_{m, \sigma}.$$

为简单, 记 $\|\psi\|_{n, \sigma} = \|\psi\|_{L^2(I_n; L_\sigma^2(\Omega))}$ 和 $\max_{I_n} \|\psi(t)\|_\sigma = \|u\|_{L^\infty(I_n; L_\sigma^2(\Omega))}$.

定理 1. 设初始值 $U^0 = u_0(x)$, 则格式 (2.1) 稳定并且对 $n = 0, 1, \dots, N-1$ 有

$$\max_{I_n} \|U\|_\sigma \leq c \left\{ \|u_0\|_\sigma + \left(\int_0^T \|f\|_\sigma^2 dt \right)^{1/2} \right\}.$$

证明. 为了充分利用矩阵 $\mathcal{M}$ 的性质, 将 U 重新表示成 I_n 上的插值形式:

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^q \tau_j^{1/2} \ell_{n,j}(t) \tilde{U}^{n,j}, \quad \tilde{U}^{n,j} = \tau_j^{-1/2} U^{n,j} \in S_h^n \quad (3.1)$$

将表达式 (3.1) 代入式 (2.1) 并取 $\phi = \tau_i^{-1/2} \ell_{n,i}(t) \psi$, 有

$$\begin{aligned} \delta_{qi} (x_1^\sigma \tilde{U}^{n,q}, \psi) - \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) \tau_j^{1/2} \tau_i^{-1/2} (x_1^\sigma \tilde{U}^{n,j}, \psi) + k_n \omega_i (x_1^\sigma \nabla \tilde{U}^{n,i}, \nabla \psi) \\ = \tau_i^{-1/2} \ell_{n,i}(t^n) (x_1^\sigma U^n, \psi) + \tau_i^{-1/2} \int_{I_n} (x_1^\sigma f(t), \ell_{n,i}(t) \psi) dt, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.2)$$

利用引理 1 易知,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \delta_{qi} (x_1^\sigma \tilde{U}^{n,q}, \tilde{U}^{n,i}) - \sum_{i,j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) \tau_j^{1/2} \tau_i^{-1/2} (x_1^\sigma \tilde{U}^{n,j}, \tilde{U}^{n,i}) \\ = ((x_1^\sigma \mathcal{M} \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{U}})) \geq \lambda \|\tilde{\mathbf{U}}\|_\sigma^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}^{n,1}, \dots, \tilde{U}^{n,q})^T$. 另一方面, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^q \ell_{n,i}(t^n) \tau_i^{-1/2} (x_1^\sigma U^n, \tilde{U}^{n,i}) \right| &\leq c \|U^n\|_\sigma \|\tilde{\mathbf{U}}\|_\sigma, \\ \left| \sum_{i=1}^q \int_{I_n} (\ell_{n,i} \tau_i^{-1/2} x_1^\sigma f, \tilde{U}^{n,i}) dt \right| &\leq c k_n \|f\|_{n, \sigma} \|\tilde{\mathbf{U}}\|_\sigma. \end{aligned} \quad (3.4)$$

因此, 在格式 (3.2) 中取 $\psi = \tilde{U}^{n,i}$, 并 i 从 1 到 q 求和, 再利用上述估计, 经整理得

$$\|\tilde{\mathbf{U}}\|_\sigma \leq c \|U^n\|_\sigma + c k_n \|f\|_{n, \sigma}. \quad (3.5)$$

又注意到 $U^{n,j} = \tau_j^{1/2} \tilde{U}^{n,j}$ ($j = 1, \dots, q$), 并且有关系式:

$$\|U\|_{n, \sigma}^2 = \sum_{j=1}^q w_{n,j} \|U^{n,j}\|_\sigma^2 = k_n \sum_{j=1}^q \omega_j \|U^{n,j}\|_\sigma^2. \quad (3.6)$$

于是, 从 (3.5) 和 (3.6) 得

$$\|U\|_{n, \sigma}^2 \leq c k_n \{ \|U^n\|_\sigma^2 + \|f\|_{n, \sigma}^2 \}. \quad (3.7)$$

另一方面, 在 (2.1) 中取 $\phi = U$, 利用分部积分和 Cauchy-Schwarz 不等式, Young 不等式, 得

$$\|U^{n+1}\|_{\sigma}^2 \leq c\{\|U^n\|_{\sigma}^2 + \|f\|_{n,\sigma}^2 + \|U\|_{n,\sigma}^2\}, \quad (3.8)$$

结合 (3.7) 和 (3.8), 得

$$\|U^{n+1}\|_{\sigma}^2 \leq c(1 + k_n)\{\|U^n\|_{\sigma}^2 + \|f\|_{n,\sigma}^2\}. \quad (3.9)$$

对 (3.9) 式中 n 从 0 迭代至 ℓ ($1 \leq \ell \leq N-1$), 并结合式 (3.7), 有

$$\|U\|_{\ell,\sigma} \leq ck_{\ell}^{1/2}\{\|u_0\|_{\sigma} + (\int_0^{\ell+1} \|f\|_{\sigma}^2 dt)^{1/2}\}.$$

又因为 $U|_{I_n} \in V_{hk}^n$, 逆不等式

$$\max_{I_n} \|y(t)\| \leq c_I k_n^{-1/2} \left(\int_{I_n} \|y(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_{q-1}(I_n), \quad c_I > 0, \quad (3.10)$$

表明, 对 $n = 0, 1, \dots, N-1$ 有

$$\max_{I_n} \|U\|_{\sigma} \leq c \left\{ \|u_0\|_{\sigma} + \left(\int_0^T \|f\|_{\sigma}^2 dt \right)^{1/2} \right\},$$

因而定理 1 得证.

4. 收敛性分析和误差估计

4.1. 误差方程

下面给出问题 (1.1) 的 $L^{\infty}([0, T]; L_{\sigma}^2(\Omega))$ 模误差估计.

定义 6. 对给定的 $s, m = 0, 1, \dots$, 和 $v \in H_{\sigma}^m(\Omega)$, 定义离散模

$$\|h_n^s v\|_{m,h,\sigma}^2 = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^n} h_{\tau}^{2s} \|v\|_{m,\tau,\sigma}^2.$$

定义 7. 加权椭圆投影算子: $P_h^n : V_0^1(\Omega) \rightarrow S_h^n$ 使得

$$(x_1^{\sigma} \nabla(u - P_h^n u), \nabla v) = 0, \quad \forall v \in S_h^n. \quad (4.1)$$

如果 $u \in H_{\sigma}^s(\Omega) \cap V_0^1(\Omega)$ ($2 \leq s \leq r+1$), 则 P_h^n 满足如下估计式^[13,14]:

$$\|u - P_h^n u\|_{\sigma} \leq c \|h_n^s u\|_{s,h,\sigma}, \quad \|\nabla(u - P_h^n u)\|_{\sigma} \leq c \|h_n^{s-1} u\|_{s,h,\sigma}. \quad (4.2)$$

定义 8. 时间单元 $I_n = (t^n, t^{n+1}]$ 上定义以 Radau 点 $t^{n,j}$ ($1 \leq j \leq q$) 为节点的 Lagrange 插值算子: $\mathcal{I}_{q-1}^n : C(I_n) \rightarrow P_{q-1}(I_n)$ 使得

$$(\mathcal{I}_{q-1}^n v)(t^{n,j}) = v(t^{n,j}), \quad 1 \leq j \leq q.$$

显然, $\mathcal{I}_{q-1}^n v(t) \in P_{q-1}(I_n)$ 并且 $\mathcal{I}_{q-1}^n v(t^{n+1}) = v(t^{n+1})$. 由 $\mathcal{I}_{q-1}^n$ 的定义知, 函数 $W(x, t)|_{I_n} = \mathcal{I}_{q-1}^n P_h^n u(x, t)$ $((x, t) \in \Omega \times I_n)$, 属于有限元空间 V_{hk}^n . 为简单起见, 仍用 W 表示 $W|_{I_n}$.

引理 2. 对 $2 \leq s \leq r+1$, 利用插值逼近性质有估计式^[12-14]:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \|u - W\|_{n,\sigma} \leq ck_n^q \|u^{(q)}\|_{n,\sigma} + ck_n^{1/2} \max_{I_n} \|h_n^s u\|_{s,h,\sigma}, \\ (b) \quad & \max_{I_n} \|u - W\|_{\sigma} \leq ck_n^q \max_{I_n} \|u^{(q)}\|_{\sigma} + c \max_{I_n} \|h_n^s u\|_{s,h,\sigma}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

误差 $e = U - u$ 分裂为: $U - u = E - \rho$, $E = U - W$, $\rho = u - W$. 收敛性分析的主要思路: 对 ρ 利用式 (4.3) 可得估计结果. 为此, 主要的工作就在于如何估计 E . 从 (2.1) 式, 可得到 $E = E|_{I_n}$ 满足的方程:

$$\begin{aligned} (x_1^\sigma E^{n+1}, \phi^{n+1}) - \int_{I_n} \{ (x_1^\sigma E, \phi_t) + (x_1^\sigma \nabla E, \nabla \phi) \} dt &= (x_1^\sigma E^n + W^n, \phi^{n+1}) \\ &+ \int_{I_n} (x_1^\sigma f, \phi) dt - ((x_1^\sigma W^{n+1}, \phi^{n+1}) \\ &- \int_{I_n} \{ (x_1^\sigma W, \phi_t) + (x_1^\sigma \nabla W, \nabla \phi) \} dt - (x_1^\sigma W^n, \phi^{n+1})), \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $W^0 = P_h^0 u_0$, $E^0 = U^0 - W^0 = u_0 - P_h^0 u_0$. 利用插值 $W = \mathcal{I}_{q-1}^n P_h^n u = \sum_{j=1}^q \ell_{n,j} P_h^n u^{n,j}$, 有 $E = U - W = \sum_{j=1}^q \ell_{n,j} E^{n,j} = \sum_{j=1}^q \ell_{n,j}(t)(U^{n,j} - P_h^n u^{n,j})$. 于是, 在式 (4.4) 中取 $\phi = \ell_{n,i}(t)\psi$ ($\psi \in S_h^n$), 并令 $\omega(x, t) = P_h^n u(x, t)$, $\eta = u - \omega$, 有

$$\begin{aligned} \delta_{qi}(x_1^\sigma E^{n,q}, \psi) - \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j})(x_1^\sigma E^{n,j}, \psi) + k_n \omega_i(x_1^\sigma \nabla E^{n,i}, \nabla \psi) \\ = (x_1^\sigma E^n, \ell_{n,i}(t^n)\psi) + (\Theta^{n,i} + A^{n,i} + B^{n,i}, x_1^\sigma \psi) - (x_1^\sigma J[\eta^n], \ell_{n,i}(t^n)\psi), \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $\eta^{n,i} = \eta(\cdot, t^{n,i})$, 并且

$$\begin{aligned} \Theta^{n,i} &:= \delta_{qi} \eta^{n,q} - \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) \eta^{n,j} - \ell_{n,i}(t^n) \eta^{n+}, \\ A^{n,i} &:= \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) u^{n,j} - \int_{I_n} \ell'_{n,i}(t) u dt, \\ B^{n,i} &:= k_n \omega_i \left(\frac{1}{x_1^\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\sigma \frac{\partial u^{n,i}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u^{n,i}}{\partial x_2^2} \right) - \int_{I_n} \ell_{n,i}(t) \left(\frac{1}{x_1^\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dt, \\ J[\eta^n] &:= \eta^n - \eta^{n+} = \omega^{n+} - \omega^n = (P_h^n - P_h^{n-1})u(t^n). \end{aligned}$$

显然, 若 $S_h^{n-1} = S_h^n$, 则 $[\eta^n] = 0$, 否则 $[\eta^n] \neq 0$. 在上式中, 用到了 W 的定义和

$$(x_1^\sigma u^{n+1}, \phi^{n+1}) - \int_{I_n} \{ (x_1^\sigma u, \phi_t) + (x_1^\sigma \nabla u, \nabla \phi) \} dt = (x_1^\sigma u^n, \phi^{n+1}) + \int_{I_n} (x_1^\sigma f, \phi) dt.$$

4.2. 辅助引理

这些引理能够保证收敛性分析所得有限元解的误差估计是最优的.

引理 3. 对任意的 n ($0 \leq n \leq N-1$) 和 $i = 1, \dots, q$ 有误差估计

$$\begin{aligned} (a) \quad & \|\Theta^{n,i}\|_{\sigma} \leq ck_n^{1/2} \left(\int_{I_n} \|h_n^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}^2 dt \right)^{1/2}, \\ (b) \quad & \|A^{n,i}\|_{\sigma} \leq ck_n^{q+1/2} \|u^{(q+1)}\|_{n,\sigma}, \\ (c) \quad & \|B^{n,i}\|_{\sigma} \leq ck_n^{q+1/2} \|Lu^{(q)}\|_{n,\sigma}, \quad Lu = \frac{1}{x_1^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

证明. 在这里仅给出 $B^{n,i}$ 的估计证明. $\Theta^{n,i}$ 和 $A^{n,i}$ 的估计证明与文 [12] 中引理 3.1 类似, 此处从略. 由于 $\forall x \in \Omega$, $\ell_{n,i}(t) \mathcal{I}_{q-1}^n Lu \in P_{2q-2}(\bar{I}_n)$,

$$B^{n,i} = \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell_{n,i}(t^{n,j}) Lu^{n,j} - \int_{I_n} \ell_{n,i} Lu dt = \int_{I_n} \ell_{n,i} (\mathcal{I}_{q-1}^n - I) Lu dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \|B^{n,i}\|_{\sigma} &= \left(\int_{\Omega} x_1^{\sigma} (B^{n,i})^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} x_1^{\sigma} \left(\int_{I_n} |\ell_{n,i}(t)|^2 dt \int_{I_n} |(\mathcal{I}_{q-1}^n - I) Lu|^2 dt \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{I_n} |\ell_{n,i}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \| \mathcal{I}_{q-1}^n Lu - Lu \|_{n,\sigma} \\ &\leq c \left(k_n \int_0^1 |\ell_i(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} k_n^q \|Lu^{(q)}\|_{n,\sigma} \leq ck_n^{q+1/2} \|Lu^{(q)}\|_{n,\sigma}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

证毕.

引理 4. 对任意的 n ($0 \leq n \leq N-1$) 和充分小的 k_n 有

$$\begin{aligned} \|E\|_{n,\sigma}^2 &\leq ck_n \{ \|E^n\|_{\sigma}^2 + k_n^{2q+1} (\|u^{(q+1)}\|_{n,\sigma} + \|Lu^{(q)}\|_{n,\sigma}^2) \\ &\quad + k_n \max_{I_n} \|h_n^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}^2 + \|J[\eta^n]\|_{\sigma}^2 \}. \end{aligned}$$

证明. 将 E 重新写为 I_n 上的插值形式 $E = \sum_{j=1}^q \tau_j^{1/2} \ell_{n,j} \tilde{E}^{n,j}$, 并代入 (4.4) 式, 取 $\phi = \tau_i^{-1/2} \ell_{n,i} \psi$ ($\psi \in S_{h,r}^n$), 得

$$\begin{aligned} \delta_{qi} (x_1^{\sigma} \tilde{E}^{n,q}, \psi) &- \sum_{j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) \tau_j^{1/2} \tau_i^{-1/2} (x_1^{\sigma} \tilde{E}^{n,j}, \psi) + k_n \omega_i (x_1^{\sigma} \nabla \tilde{E}, \nabla \psi) \\ &= \tau_i^{-1/2} \{ (x_1^{\sigma} E^n, \ell_{n,i}(t^n) \psi) \\ &\quad + (\Theta^{n,i} + A^{n,i} + B^{n,i}, x_1^{\sigma} \psi) - (x_1^{\sigma} J[\eta^n], \ell_{n,i}(t^n) \psi) \}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

在 (4.8) 中取 $\psi = \tilde{E}^{n,i}$, 并 i 从 1 到 q 求和. 利用引理 1 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \delta_{qi} (x_1^{\sigma} \tilde{E}^{n,q}, \tilde{E}^{n,i}) &- \sum_{i,j=1}^q w_{n,j} \ell'_{n,i}(t^{n,j}) \tau_j^{1/2} \tau_i^{-1/2} (x_1^{\sigma} \tilde{E}^{n,j}, \tilde{E}^{n,i}) \\ &= ((x_1^{\sigma} \mathcal{M} \tilde{E}^n, \tilde{E}^n)) \geq \lambda \sum_{j=1}^q \|\tilde{E}^{n,j}\|_{\sigma}^2, \end{aligned}$$

于是利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=1}^q \|\tilde{E}^{n,j}\|_{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^q k_n \omega_i \|\nabla \tilde{E}^{n,i}\|_{\sigma}^2 &\leq c \left(\sum_{j=1}^q \|\tilde{E}^{n,j}\|_{\sigma}^2 \right)^{1/2} \left\{ \|E^n\|_{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^q [\|\Theta^{n,i}\|_{\sigma}^2 + \|A^{n,i}\|_{\sigma}^2 + \|B^{n,i}\|_{\sigma}^2] \right)^{1/2} + \|J[\eta^n]\|_{\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

利用关系式:

$$\|E\|_{n,\sigma}^2 = \sum_{j=1}^q w_{n,j} \|E^{n,j}\|_{\sigma}^2 = k_n \sum_{j=1}^q \omega_j \|E^{n,j}\|_{\sigma}^2, \quad (4.9)$$

并取 k_n 充分小, 得到

$$\|E\|_{n,\sigma}^2 \leq ck_n \{ \|E^n\|_{\sigma}^2 + \|J[\eta^n]\|_{\sigma}^2 \} + ck_n \left\{ \sum_{i=1}^q (\|\Theta^{n,i}\|_{\sigma}^2 + \|A^{n,i}\|_{\sigma}^2 + \|B^{n,i}\|_{\sigma}^2) \right\}.$$

于是结合引理 3 得到引理 4 的结论.

4.3. 最优误差估计

定理 2. 设 u 是问题 (1.1) 的解, U 是格式 (2.1) 的解, 并且初始值 $U^0 = u_0$, 则存在不依赖于 k_n 和 h_n 的正常数 c 使得对 $2 \leq s \leq r+1$ 有 $L^\infty([0, T]; L_\sigma^2(\Omega))$ -模误差估计

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|u(t) - U(t)\|_{\sigma} &\leq c \left\{ \max_n \max_{I_n} (\|h_n^s u_t\|_{s,h,\sigma} + \|h_n^s u\|_{s,h,\sigma}) \right. \\ &\quad \left. + \max_n k_n^q \max_{I_n} (\|u^{(q+1)}\|_{\sigma} + \|Lu^{(q)}\|_{\sigma}) + \mathcal{N}_c \max_n \|J[\eta^n]\|_{\sigma} \right\}, \end{aligned}$$

其中 $J[\eta^n] = (P_h^n - P_h^{n-1})u(t^n)$, 这里 P_h^n 是椭圆投影算子.

证明. 在 (4.5) 式中取 $\psi = E^{n,i}$, 并 i 从 1 到 q 求和. 此时, 其左端与在 (2.1) 中取 $\Phi = E$ 所得方程左端相等. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \|E^{n+1}\|_{\sigma}^2 + \|E^{n+}\|_{\sigma}^2 \} + \|\nabla E\|_{n,\sigma}^2 &= (x_1^\sigma E^n, E^{n+}) - (x_1^\sigma J[\eta^n], E^{n+}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (\Theta^{n,i} + A^{n,i} + B^{n,i}, x_1^\sigma E^{n,i}). \end{aligned}$$

对上式利用关系式 (4.9), 引理 3, Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式并注意到: 当 $S_h^{n-1} = S_h^n$ 时 $J[\eta^n] = 0$, 经整理得

$$\begin{aligned} \|E^{n+1}\|_{\sigma}^2 &\leq (1 + \beta_n) \|E^n\|_{\sigma}^2 + ck_n^{2q} (\|u^{(q+1)}\|_{n,\sigma} + \|Lu^{(q)}\|_{n,\sigma}^2) \\ &\quad + ck_n \max_{I_n} \|h_n^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}^2 + M_n \|J[\eta^n]\|_{\sigma}^2 + c \|E\|_{n,\sigma}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 M_n 与 n 有关的常数. 对固定的 n , 取 $M_m = M = \mathcal{N}_c(n)$ ($m = 1, \dots, n$). 这里 $\mathcal{N}_c(n)$ 表示 $S_h^j \neq S_h^{j-1}$ ($j = 1, \dots, n$) 的总数, 并且当 $\mathcal{N}_c(n) = 0$ 或 1 时取 $M = 2$. 另外当 $S_h^n = S_h^{n-1}$ 时, $\beta = 0$, 否则 $\beta = \frac{1}{M_n - 1}$.

将引理 4 的结论代入 (4.10) 式右端, 再对 n 进行迭代, 经整理得

$$\begin{aligned} \|E^{n+1}\|_{\sigma}^2 &\leq \prod_{j=0}^n (1 + \beta_j + ck_j) \|E^0\|_{\sigma}^2 \\ &\quad + c \sum_{m=0}^n \left(\prod_{j=m+1}^n (1 + \beta_j + ck_j) \right) \left(F_m + (ck_m + M_m) \|J[\eta^m]\|_{\sigma}^2 \right). \end{aligned}$$

其中 $F_m = k_m^{2q} \{ \|u^{(q+1)}\|_{m,\sigma}^2 + \|Lu^{(q)}\|_{m,\sigma}^2 \} + k_m \max_{I_m} \|h_m^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}^2$.

注意到当 $S_h^j \neq S_h^{j-1}$ ($j = 1, \dots, n$) 时 $\beta_j = \beta = \frac{1}{M-1}$ 并置 $C_n := (3e^{2ct^{n+2}})^{1/2}$. 由于 $E^0 = u_0 - P_h^0 u_0$, $J[\eta^0] = 0$, 并且 $k_m \leq M$, 得

$$\|E^{n+1}\|_{\sigma} \leq C_{n+1} \left\{ \|u_0 - P_h^0 u_0\|_{\sigma} + c \left(\sum_{m=0}^n F_m \right)^{1/2} + c\sqrt{M} \left(\sum_{m=1}^n \|J[\eta^m]\|_{\sigma}^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.11)$$

再由引理 4 和 (4.11), 对 $n = 0, \dots, N-1$ 有

$$\|E\|_{n,\sigma} \leq k_n^{1/2} c C_n \left\{ \|h_0^{r+1} u_0\|_{r+1,h,\sigma} + \left(\sum_{m=0}^n F_m \right)^{1/2} + \sqrt{M} \left(\sum_{m=1}^n \|J[\eta^m]\|_{\sigma}^2 \right)^{1/2} \right\},$$

又因为 $E|_{I_n} \in V_{hK}^n$, 利用逆不等式 (3.10), 得

$$\max_{I_n} \|E\|_{\sigma} \leq c C_n \left\{ \|h_0^{r+1} u_0\|_{r+1,h,\sigma} + \left(\sum_{m=0}^n F_m \right)^{1/2} + \sqrt{M} \left(\sum_{m=1}^n \|J[\eta^m]\|_{\sigma}^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.12)$$

最后, 结合三角不等式 $\|u - U\|_{\sigma} \leq \|E\|_{\sigma} + \|\rho\|_{\sigma}$ 及 (4.3) 式, 得

$$\begin{aligned} \max_{I_n} \{ \|u(t) - U(t)\|_{\sigma} &\leq c C_n \max_{0 \leq m \leq n} \max_{I_m} [\|h_m^{r+1} u\|_{r+1,h,\sigma} + \|h_m^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}] \\ &\quad + c C_n \max_{0 \leq m \leq n} k_m^q \max_{I_m} [\|u^{(q+1)}\|_{\sigma} + \|Lu^{(q)}\|_{\sigma}] + c C_n M \max_{1 \leq m \leq n} \|J[\eta^m]\|_{\sigma}, \end{aligned}$$

进一步, 有误差估计

$$\begin{aligned} \max_{t \in (0,T)} \|u(t) - U(t)\|_{\sigma} &\leq \tilde{C} \max_n \max_{I_n} [\|h_n^{r+1} u\|_{r+1,h,\sigma} + \|h_n^{r+1} u_t\|_{r+1,h,\sigma}] \\ &\quad + \tilde{C} \max_n k_n^q \max_{I_n} [\|u^{(q+1)}\|_{\sigma} + \|Lu^{(q)}\|_{\sigma}] + \tilde{C} \mathcal{N}_c \max_n \|J[\eta^n]\|_{\sigma}, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{C} = ce^{cT}$ 是正常数, $\mathcal{N}_c$ 表示 $S_h^j \neq S_h^{j-1}$ ($j = 1, \dots, N-1$) 的总数. $J[\eta^n] = \omega^{n+} - \omega^n$ 表示投影 $\omega(t) = P_h^n u(t)$ 在点 t^n 处跳跃项 $(P_h^n - P_h^{n-1})u(x, t^n)$.

注 2. 这里应用 $\|h_{n-1}^{r+1} u\|_{r+1,h,\sigma} + \|h_n^{r+1} u\|_{r+1,h,\sigma}$, 总能够估计 $\|J[\eta^n]\|_{\sigma}$. 因此, 定理 2 的估计式是收敛的. 此外, 当空间 S_h^n ($n = 0, \dots, N-1$) 的变化不是很频繁时, 定理 2 给出的 $L^\infty([0, T]; L_\sigma^2(\Omega))$ -模误差估计是 $O(k^q, h^{r+1})$.

注 3. 时间间断时空有限元格式 (2.1) 的等价格式 (2.6) 实质上是时间方向为以 q 个 Radau 点为节点的数值方法. 因此, 该方法在时间方向上能够达到 $2q-1$ 阶收敛^[16,17].

为此, 下面采用单元正交分析方法^[17]证明时间节点上的 $2q-1$ 阶收敛性. 在时空片 $I_n \times \Omega$ 上, 记

$$B_n(U, \phi) = \int_{I_n} [(x_1^\sigma U_t, \phi) + (x_1^\sigma \nabla U, \nabla \phi)] dt + (x_1^\sigma [U^n], \phi^{n+}),$$

其中 $[U^n] = U^{n+} - U^n$. 于是用时间方向的分部积分可将格式 (2.1) 转化为:

$$B_n(U, \phi) = \int_{I_n} (x_1^\sigma f, \phi) dt, \quad \forall \phi \in V_{hk}^n. \quad (4.13)$$

设 $\ell_m(s)$ 表示单元 $E = (-1, 1)$ 上的 m 次 Legendre 多项式. 进一步, 在 E 上定义多项式

$$\varphi_0(s) = 1, \quad \varphi_{m+1}(s) = \ell_{m+1}(s) - \ell_m(s), \quad (m \geq 0),$$

则当 $m \geq 0$ 时 $\varphi_{m+1}(s)$ 在 E 中有 $m+1$ 个实根, $s_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, m$. 特别地 $s_m = 1$ 是根.

设 P_E^n 是加权 $L^2(\Omega)$ 投影算子, 即对任意的 $u \in L^2(\Omega)$ 有

$$(x_1^\sigma(u - P_E^n u), \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_h^n,$$

则当 $u \in H_\sigma^{r+1}(\Omega) \cap V_0^1(\Omega)$, P_E^n 满足如下估计式^[13,14]:

$$\|u - P_E^n u\|_\sigma \leq c \|h_n^{r+1} u\|_{r+1, h, \sigma}, \quad \|P_E^n u\|_\sigma \leq \|u\|_\sigma.$$

定理 3. 设 u 是问题 (1.1) 的解, U 是格式 (2.1) 的解, 并且初始值 $U^0 = u_0$, 则存在不依赖 k 和 h 的正常数 c 使得对 $0 \leq n \leq N$,

$$\|u^n - U^n\|_\sigma \leq c \|h_n^{r+1} u\|_{r+1, h, \sigma} + ck^{2q-1} \left(\int_0^{t^n} \|u^{(q)}\|_{\sigma, 2}^2 dt \right)^{1/2}.$$

证明. 在单元 $I_n = (t^n, t^{n+1}]$ 上作变换 $t = t^{mid} + \frac{k_n}{2}s, s \in (-1, 1)$, 其中 $t^{mid} = \frac{t^{n+1} + t^n}{2}$. 记 $\omega(x, t) = P_E^n u(x, t)$ 并设 $\omega(x, s) = \omega(x, t^{mid} + \frac{k_n}{2}s)$ 已展为级数

$$\omega(x, s) = b_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) \phi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i(x) - b_{i+1}(x)) \ell_i(s). \quad (4.14)$$

由 Legendre 正交展开知,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= b_i(x) - b_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 \omega(x, s) \ell_i(s) ds = \frac{(-1)^i (2i+1)}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial^i \omega(x, s)}{\partial s^i} (s^2 - 1)^i ds \\ &= \frac{(-1)^i (2i+1) (\xi^2 - 1)^i}{2^i} k_n^{i-1} \int_{I_n} \frac{\partial^i \omega(x, t)}{\partial t^i} dt = O(k_n^i). \end{aligned}$$

于是,

$$b_i = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j = O(k_n^i), \quad i \geq 0.$$

进一步, 构造 $q-1$ 次多项式 $W(x, s)$ 使得 $W(x, 1) = \omega(x, 1)$, 且其余项为

$$R = \omega - W = \sum_{j=1}^{q-1} b_j^*(x) \phi_j(s) + \sum_{j=q}^{\infty} b_j(x) \phi_j(s),$$

其中 b_j^* 是待定系数, 而 b_j 是 (4.14) 中的已给系数. 显然, $R(1) = 0$. 误差 $e = u - U$ 分裂为: $e = u - W + W - U = \rho + \theta$. 用分部积分, 余项 R 和投影 P_E^n 的定义, 有

$$\begin{aligned} B_n(\rho, \phi) &= (x_1^\sigma \rho, \phi) \Big|_{t^{n+}}^{t^{n+1}} - \int_{I_n} (x_1^\sigma \rho, \phi_t) dt + \int_{I_n} (x_1^\sigma \rho, L\phi) dt + (x_1^\sigma [\rho^n], \phi^{n+}) \\ &= - \int_{-1}^1 (x_1^\sigma R, \phi_s + \frac{k_n}{2} L\phi) ds, \end{aligned}$$

其中 $L\phi$ 的定义见引理 3.

取 $\phi = \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i(x)\varphi_i$, 上式有

$$B_n(\rho, \phi) = - \sum_{i=0}^{q-1} \left(x_1^\sigma \left(\sum_{j=1}^{q-1} C_{ij} b_j^*(x) + \sum_{j=q}^{\infty} C_{ij} b_j(x) \right), \beta_i(x) + L\beta_i(x) \right), \quad (4.15)$$

其中系数 $C_{ij} = \int_{-1}^1 (\varphi_i' + \frac{k_n}{2} \varphi_i) \varphi_j ds$, 且易推出

$$C_{ii} = -2 + O(k_n), \quad i \geq 1; \quad C_{j+1,j} = 4 + O(k_n), \quad i = j + 1;$$

$$C_{ij} = O(k_n^{|i-j|}), \quad \text{在其他情形, } i \geq 0, j \geq 1.$$

现在要求 b_j^* 满足 $q-1$ 阶线性方程组

$$\sum_{j=1}^{q-1} C_{ij} b_j^* = - \sum_{j=q}^{\infty} C_{ij} b_j = O(k_n^{2q}), \quad 1 \leq i \leq q-1.$$

它的系数矩阵有如下结构

$$[C_{ij}] \approx \begin{pmatrix} -2 & k_n & k_n^2 & k_n^3 & \cdots & k_n^{q-1} \\ 4 & -2 & k_n & k_n^2 & \cdots & k_n^{q-2} \\ k_n & 4 & -2 & k_n & \cdots & k_n^{q-3} \\ k_n^2 & k_n & 4 & -2 & \cdots & k_n^{q-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_n^{q-2} & k_n^{q-3} & k_n^{q-4} & k_n^{q-5} & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

若从最后一行开始观察, 可唯一解出 $b_j^* = O(k_n^{2q-j})$, $1 \leq j \leq q-1$. 于是, 单元积分 (4.15) 化简为

$$\begin{aligned} B_n(\rho, \phi) &= - \left(x_1^\sigma \left(\sum_{j=1}^{q-1} C_{0j} b_j^*(x) + \sum_{j=q}^{\infty} C_{0j} b_j(x) \right), \beta_0(x) + L\beta_0(x) \right) \\ &= -O(k_n^{2q-1}) \int_{I_n} \left(x_1^\sigma \frac{\partial^q \omega(x, t)}{\partial t^q}, \beta_0(x) + L\beta_0(x) \right) dt. \end{aligned}$$

由于问题 (1.1) 的解 u 满足 (4.13), 故有

$$B_n(\theta, \phi) = -B_n(\rho, \phi) \leq O(k_n^{2q-1}) \left(\|\omega^{(q)}\|_{n,\sigma} + \|L\omega^{(q)}\|_{n,\sigma} \right) \|\phi\|_{n,\sigma},$$

其中 $\omega^{(q)} = \frac{\partial^q \omega(x, t)}{\partial t^q}$, 并用了逆不等式 $|\beta_0| \leq c \int_{-1}^1 |\phi| ds$.

首先, 取 $\phi = \theta$, 积分并用 Young 不等式后有

$$\|\theta^{n+1}\|_\sigma^2 - \|\theta^n\|_\sigma^2 + \|\nabla \theta\|_{n,\sigma}^2 \leq ck_n^{4q-2} \left(\|\omega^{(q)}\|_{n,\sigma}^2 + \|L\omega^{(q)}\|_{n,\sigma}^2 \right) + c\|\theta\|_{n,\sigma}^2, \quad (4.16)$$

对所有时间单元求和, 得

$$\|\theta^N\|_\sigma^2 \leq \|\theta^0\|_\sigma^2 + c \sum_{n=0}^{N-1} k_n^{4q-2} \int_{I_n} \|\omega^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt + c \int_0^{t^N} \|\theta\|_\sigma^2 dt. \quad (4.17)$$

其次, 取 $\phi = (t - t^n)\theta_t$, 则 $\phi^{n+} = 0$ 并有

$$\begin{aligned} \int_{I_n} (t - t^n) \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt + \frac{k_n}{2} \|\nabla \theta^{n+1}\|_{\sigma}^2 &\leq \int_{I_n} \|\nabla \theta\|_{\sigma}^2 dt \\ &+ ck_n^{2q-1} \left(k_n \int_{I_n} \|\omega^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{I_n} (t - t^n) \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

利用局部逆性质, 上式变为

$$\int_{I_n} \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt \leq ck_n^{-1} \int_{I_n} (t - t^n) \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt \leq ck_n^{-1} \int_{I_n} \|\nabla \theta\|_{\sigma}^2 dt + ck_n^{4q-2} \int_{I_n} \|\omega^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt. \quad (4.18)$$

在 $I_n = (t^n, t^{n+1}]$ 上由 $\theta(t) = \theta^{n+1} + \int_{t^{n+1}}^t \theta_t dt$ 推出

$$\theta^2(t) \leq 2|\theta^{n+1}|^2 + 2k_n \int_{I_n} |\theta_t|^2 dt,$$

进而, 有

$$\int_{I_n} \|\theta\|_{\sigma}^2 dt \leq 2k_n \|\theta^{n+1}\|_{\sigma}^2 + 2k_n^2 \int_{I_n} \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt,$$

将 (4.17) 和 (4.18) 代入上式, 并利用 (4.16) 和 (4.17), 得

$$\int_{I_n} \|\theta\|_{\sigma}^2 dt \leq ck_n \sum_{m=0}^n k_m^{4q-2} \int_{I_m} \|\omega^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt + ck_n \sum_{m=0}^n \int_{I_m} \|\theta_t\|_{\sigma}^2 dt.$$

上式利用 Gronwall 不等式, 再求和后代入 (4.17) 有

$$\|\theta^N\|_{\sigma}^2 \leq ck^{4q-2} \int_0^{t^N} \|\omega^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt.$$

最后, 利用 $L^2(\Omega)$ 投影 P_E^n 的性质和余项 R 的定义, 可得对 $0 \leq n \leq N$,

$$\|u^n - U^n\|_{\sigma} \leq \|u^n - \omega^n\|_{\sigma} + \|\theta^n\|_{\sigma} \leq c \|h_n^{r+1} u\|_{r+1,h,\sigma} + ck^{2q-1} \left(\int_0^{t^n} \|u^{(q)}\|_{\sigma,2}^2 dt \right)^{1/2}.$$

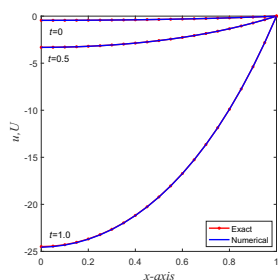
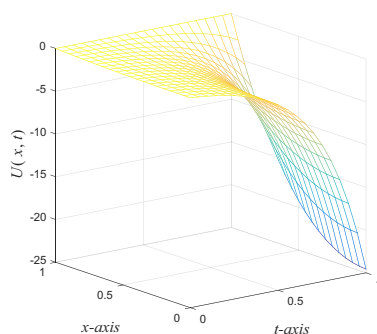
5. 数值算例

算例一 考虑如下具有精确解 $u(x, t) = e^{4t} \left(\frac{\sinh 2x}{x \sinh 2} - 1 \right)$ 的一维奇异微分方程问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - \frac{2}{x} u_x = -4e^{4t}, & x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1] \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \frac{\sinh 2x}{x \sinh 2} - 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

在数值试验中, 将时空区域进行等距剖分, 时空两个方向同时取线性多项式作为基函数, 并且为了较清楚地刻画时间和空间误差的变化和收敛性, 在时空两个方向的剖分步长中取定一个步长使其充分小使得这一方向的误差对整体误差的影响较小, 而另一方向的步长折半递减来分析其收敛阶情况. 表 1 给出了固定某一步长 (时间步长 k 或空间步长 h) 时误差

$\|u - U\|_{L^\infty(L^2_\sigma)}$ 的实验数据及其收敛阶. 随着空间步长折半递减, 空间方向的收敛阶接近二阶, 与定理 2 的理论分析结果相符. 然而随着时间步长折半递减, 时间方向的收敛阶接近三阶, 与定理 3 的理论分析结果相符, 呈现超收敛性质. 图 1 和图 2 分别绘出了当 $k = 0.05, h = 0.05$ 时不同时间层的精确解和数值解的对比图和精确解的表面图形.

图 1 u 和 U 对比图图 2 数值解 U 表面图表 1 当固定某一步长 (时间步长 k 或空间步长 h) 时, 误差和收敛阶

$k = 1.0\text{e-}04$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$\ u - U\ _{L^\infty(L^2_\sigma)}$	1.0225e-01	2.6631e-02	6.7258e-03
空间收敛阶	—	1.9410	1.9853
$h = 2.5\text{e-}04$	$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0125$
$\ u - U\ _{L^\infty(L^2_\sigma)}$	2.6679e-03	3.7570e-04	5.1144e-05
时间收敛阶	—	2.8280	2.8770

算例二 考虑具有精确解 $u(x_1, x_2, t) = \frac{e^{-2\pi^2 t}}{\pi x_1} \sin a\pi x_1 \sin a\pi x_2$ 的二维奇异微分方程问题

$$\begin{cases} a^2 u_t - \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & (x_1, x_2) \in (0, 0.1) \times (0, 0.1), \quad t \in (0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) = 0, \quad u(1, x_2, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x_1, 0, t) = 0, \quad u(x_1, 1, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{\pi x_1} \sin \pi x_1 \sin \pi x_2, & (x_1, x_2) \in [0, 0.1] \times [0, 0.1], \end{cases}$$

其中系数 $a = 10$. 在计算过程中, 将空间区域 $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ 进行一致直角三角形剖分, 时间区间 $[0, 1]$ 进行等距剖分, 时空两个方向同时采用线性多项式逼近.

表 2 给出了固定时间步长而空间步长折半减少时时空误差 $\|u - U\|_{L^\infty(L^2_\sigma)}$ 和 $t^N = 1.0$ 时 $\|u^N - U^N\|_{L^2_\sigma}$ 的空间方向的实验数据和收敛阶. 随着空间步长折半递减时, 两种范数意义

表 2 当固定时间步长 $k = 5.0\text{e-}04$ 时, 空间方向的误差估计和收敛阶

空间步长	$\ u - U\ _{L^\infty(L^2_\sigma)}$	收敛阶	$\ u^N - U^N\ _{L^2_\sigma}$	收敛阶
$\sqrt{2}/16$	9.1543e-05	—	6.5176e-12	—
$\sqrt{2}/32$	2.2949e-05	1.9960	1.7328e-12	1.9112
$\sqrt{2}/64$	5.7414e-06	1.9999	4.4001e-13	1.9775

表 3 当固定空间步长 $h = \sqrt{2}/3200$ 时, 时间方向的误差估计和收敛阶

时间步长	$\ u - U\ _{L^\infty(L^2_\sigma)}$	收敛阶	$\ u^N - U^N\ _{L^2_\sigma}$	收敛阶
1/16	8.3748e-05	—	1.0770e-11	—
1/32	1.1865e-05	2.8194	1.7054e-12	2.6588
1/64	1.8071e-06	2.7150	2.5156e-13	2.7612

下的收敛阶均接近二阶, 与定理 2 的理论分析结果相符. 表 3 给出了固定空间步长而时间步长折半减少时关于两种范数意义下的误差数据和收敛阶. 表中数据表明, 随着时间步长折半递减时, 两种范数意义下的收敛阶均接近三阶, 与定理 3 的理论分析结果相符, 呈现超收敛性质. 这些实验数据, 从数值计算角度表明算法的无条件稳定性和有效性.

致谢. 在此由衷地感谢各位评审老师, 正是你们真挚的意见和建议, 大大地提升了本文的质量.

参 考 文 献

- [1] 李德茂, 王刚. 奇异微分方程有限元方法 [M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 2004.
- [2] Arroyo D, Bepalov A, Heuer N. On the finite element method for elliptic problems with degenerate and singular coefficients[J]. Math. Comput., 2007, 76(258): 509–537.
- [3] Bidwell S, Hassell M E, Westphal C R. A weighted least squares finite element method for elliptic problems with degenerate and singular coefficients[J]. Math. Comput., 2013, 82: 673–688.
- [4] 陈传森. 奇型非线性两点边值问题 Galerkin 解的超收敛性 [J]. 计算数学, 1985, 2: 113–123.
- [5] 张旭. 一类奇异非线性两点边值问题的 Galerkin 解的误差估计 [J]. 计算数学, 2010, 32(2): 195–205.
- [6] 张旭. 一类奇异两点边值问题的有限元方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2013, 35(3): 193–205.
- [7] 白阿拉坦高娃, 何斯日古楞, 李宏. 一维奇异抛物方程的混合有限元方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2015, 37(4): 289–301.
- [8] 李宏. 一般二维奇异问题的间断时空有限元法 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2005, 36(5): 505–509.
- [9] 李宏, 刘洋, 王金凤. 二维拟线性奇异抛物问题的时空间断有限元法 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2006, 37(6): 622–627.
- [10] 刘金存, 李宏. 奇异半线性抛物方程的时空有限元法 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2006, 37(6): 616–621.
- [11] 李宏, 魏小溪. 奇异非线性抛物方程的时空有限元方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2007, 29(1): 39–46.
- [12] Karakashian O, Makridakis C. A space-time finite element method for the nonlinear Schrödinger equation: The discontinuous Galerkin method[J]. Math. Comput., 1998, 67: 479–499.
- [13] Ciarlet P G. The finite element methods for elliptic problems[M]. New York: North-Holland, 1978.

- [14] Brenner S C, Scott L R. The mathematical theory of finite element methods[M]. Berlin: Springer-verlag, 1994.
- [15] 马振华. 现代应用数学手册计算与数值分析卷 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 195–196.
- [16] 李寿佛. 刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析 [M]. 湘潭: 湘潭大学出版社, 2010: 207–214.
- [17] 陈传森. 有限元超收敛构造理论 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2001.

TIME DISCONTINUOUS SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHOD FOR UNSTEADY DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

He Siriguleng Li Hong Liu Yang Fang Zhichao

(School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract

A time discontinuous space-time finite element formulation is presented for a class of two-dimensional unsteady uniaxial problem with singular coefficients. By using the characteristic of Lagrange polynomial at Radau nodes, and the technique of combining finite difference method and finite element method, the stability of the scheme and the temporal maximum norm and spatial weighted $L^2(\Omega)$ -norm error estimation of the finite element solution are proved. Finally, some numerical results are given to verify the theoretical results and the feasibility of the scheme.

Keywords: unsteady differential equation with singular coefficients; time discontinuous space-time finite element method; error estimate

2010 Mathematics Subject Classification: 65M60, 65N30