数学聊斋连载

（连载四）

李尚志

千手观音有多少只手

——集合的元素个数

重庆大足石刻是世界文化遗产。大足石刻有一尊千手观音。导游带领游客参观的时候会告诉你：这尊千手观音一共有 1007 只手。然后问：1007 这个准确数字是怎样数出来的？

只要你看了这尊观音，就知道要数清有多少只手并不容易。观音的手如孔雀开屏般向各个方向伸出，长短各异，方向各异，千姿百态，无一雷同。各只手的位置没有规律，不可能按某种方式排列成先后顺序一只一只数清楚。

传说清代时有个工匠被请来对千手观音“贴金”，他为了数清千手观音的手，贴完一只手就朝桶里扔一支竹签。等所有的手臂都贴完了以后，再数一数竹签，一共有 1007 只。由此，千手观音 1007 只手的说法一直流传至今。

【注：据有关媒体报道，2009 年千手观音“大修”，专家用 248 张高精度照片纠正拼接成了千手观音的高清晰影像图，对每只手逐一编号，最后确认千手观音实际

千手观音舞蹈

上是 829 只手。也许专家确认的数字是正确的，但我仍然认为，传说中工匠的方法既简单又不容易出错。如果 1007 只手的数字有误，那也是因为从来也没有认真地按照这个方法操作一次。】

这个简单的办法包含了计数的基本思想：一一对应。将观音的手与金箔一一对应起来，又与竹签一一对应起来，这样，手就与竹签一样多。手不容易数清楚，竹签却容易一支一支数清楚。数出了竹签有多少支，就知道了手有多少只。

一支一支数竹签的时候，又建立了另外一个对应：将竹签依次与正整数 1, 2, 3, ⋯ 对应。数到最后一支竹签，发现它对应于正整数 1007, 这就将竹签的集合与从 1 到 1007 的正整数集合 {1, 2, ⋯,1007} 建立了一一对应，竹签个数也是 1007。我们通常用尺子来量长度。类似地，集合元素的多少也是用正整数集合 N={1, 2, ⋯} 这把“尺子”量出来的。用这把“尺子”去量竹签集合，从 1 开始到 1007 正好将竹签量完，也就是说从 N 这把“长尺子”截下“一小段”{1, ⋯,1007} 正好与竹签集合建立一一对应，竹签集合的元素个数就是 1007。

如果用正整数集合 N 这把尺子去量某个集合 S 时，N 的正整数始终用不完，S 就是无穷集合。如果 S 是一个无穷序列 a_1, a_2,v ⋯, a_n , ⋯ ，就可以依次将序列的各项对应于正整数 1, 2, ⋯, n, ⋯。这样就将这个序列各项组成的集合与全体正整数的集合 N 建立了一一对应。集合 N 中的元素有无穷多个，凡是与 N 能够建立一一对应的集合称为“可列集合”。可列集合是元素个数最少的无穷集合。

也许你会疑惑：怎么能说 N 是元素最少的无穷集合呢？假如将 N 中的奇数删去，剩下的全体正偶数组成一个集合 $2N$={2, 4, 6, ⋯} ，仍然是无穷集合，元素个数是 N 的一半，岂不是比 N 的元素更少了吗？

你可以认为全体正偶数只占全体正整数的一半，但是如果用 N 这把“标准尺子”去“度量”正偶数集合 $2N$，将 2, 4, 6, ⋯ 依次与 1, 2, 3, ⋯ 对应，全体正偶数的集合 $2N$ 与全体正整数的集合 N 就建立了一一对应，这就说明集合 $2N$ 与 N 所含的元素一样多，正偶数与正整数一样多！明明正偶数只占正整数的一半，居然又说它们一样多，岂不是自相矛盾？

这种看起来矛盾的现象对于有限集合是不会发生的，只有对无穷集合才会发生。为了避免矛盾，我们规定：只要能够有一种方法在两个集合 A,B 之间建立一一对应，就称两个集合的势相等。这里，“势”就是“元素个数”的意思。只要在 A,B 之间曾经建立一一对应，即使还可以将 B 中去掉一些元素之后再将剩下的元素与 A 建立一一对应，也不能说 A 的元素比 B 少，而仍然坚持认为 A,B 的元素一样多。

我们已经看到无穷集合 N 的“一半”与 N 的元素一样多。反过来，容易想到，N 的“两倍”的元素也与 N 一样多。容易看出，全体正整数组成的集合 $N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 与全体负整数组成的集合 $-N=\{-1, -2, \cdots, -n, \cdots\}$ 可以建立一一对应，元素个数相等。因此，将 N 与 $-N$ 合并在一起得到的集合就是 N 的“两倍”，再添上 0 得到的就是全体整数组成的集合 Z，它的元素个数可以认为是 N 的两倍再加 1。然而，全体整数可以按如下方式排成一个无穷数列 $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots\}$，数列中的各个数可以依次与正整数 1, 2, 3, ⋯对应，这说明了整数与正整数一样多！

每个实数可以用数轴上的一个点来表示。这样就建立了数轴与全体实数的一一对应。表示整数的点在数轴上稀稀拉拉，表示有理数的点在实数轴上密密麻麻，可见有理数比整数多得多。将实数轴分成很多长度为 1 的区间 $(n, n+1)$，则每个区间内只有一个表示整数的点，但它却有无穷多个有理数的点。可见有理数的个数是整数个数的无穷多倍。然而，全体有理数可以按如下方式排列成一个无穷数列：

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \cdots$$

排列的方法是：先将 0, 1, -1 排在前三项，再按如下原则排列其余各有理数：将 0, 1, -1 之外的每个非零有理数经过约分写成 q/p 或 $-q/p$ 或 p/q 或 $-p/q$ 的形式，其中 p, q 是互素的正整数并且 $p>q$。按 p 从小到大的顺序排列；p 相等的，按 q 从小到大的顺序排列；p 与 q 都相同的 4 个数，按 $q/p, -q/p, p/q, -p/q$ 顺序排列。

按以上方法，就将所有的有理数排成了一个无穷数列。将无穷数列的各项依次与正整数 1, 2, 3, ⋯ 对应，第 n 项与正整数 n 对应，这就建立了这个无穷数列与正整数集合 $N+$ 的一一对应，证明了有理数与正整数一样多！

能否将全体实数也排成数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，从而证明实数也与正整数一样多呢？

如果想出了一个办法将所有的实数排成无穷数列，就证明了实数与正整数一样多。反过来，即使全世界所有的人都没有找到这样的办法，也还不能就此断定这样的办法不存在。万一来了一个外星人想出这样的办法呢？

不过我们可以用反证法证明：无论何时，无论何地，谁也不能将全体实数排成一个数列！

数轴上的点与实数一一对应。假如全体实数被排成了一个数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，数轴上全体点也就对应地排成一个序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$。预先任意取定一个小的正数 e。在数轴上取一个长度为 $e/2$ 的线段 E_1 将点 A_1 盖住，再取一个长度为 $e/4$ 的线段 E_2 将点 A_2 盖住。一般地，对序列中第 n 个点 A_n，取一个长度为 $e/(2^n)$ 的线段 E_n 将它盖住。所有这些线段 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 合并起来得到的集合 E 将所有的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 全都盖住了。我们知道，这些点就是数轴上所有的点，因此 E 将数轴全部覆盖了。但另一方面，E 由线段 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 合并而成，E 的总长度不能超过这些线段的长度之和

$$\frac{e}{2}+\frac{e}{4}+\frac{e}{8}+\cdots\frac{e}{2^n}+\cdots<e$$

其中 e 可以取任意小的正数。E 的总长度小于任意正数，只能是 0，不可能覆盖整个数轴！

这个矛盾就证明了全体实数不可能排成一个数列，实数与正整数不一样多。

事实上，我们证明的结论是：如果数轴上某些点组成的集合能够排成一个序列，那么这些点的“总长度”是 0。在前面已经证明过数轴上的有理点（表示有理数的点）可以排成无穷数列，可见有理点的“总长度”是 0。除去有理点，剩下就是无理点（表示无理数的点）。数轴的总长度是无穷大，其中有理点的总长度是 0，剩下的无理点的总长度就应当是无穷大。如果要问在数轴上有理点和无理点各占百分之几，那就只能说有理点占百分之零，无理点占百分之百！

厦门和美丽的鼓浪屿

九成厦门人感到幸福遭九成以上质疑？

——统计

网上看见一篇文章《当九成厦门人感到幸福遭九成以上质疑》。现摘引一部分内容供大家欣赏：

国家统计局厦门调查队的调查报告称九成以上厦门人感到幸福，此报告刚一发布，就引来众多网友和市民的争议，其中，受争议最大的是“九成以上”这个数据的真实性。有多少人质疑这个调查结论呢？居然也是“九成以上的厦门人”。（2008 年 6 月 26 日浙江在线）

但遗憾的是，有人对于“九成以上厦门人感到幸福”的调查结论却提出质疑，最奇怪的是，质疑的人居然也在九成之多。在厦门某社区网站上，截至 25 日 19 时，关于该话题的帖子点击率为 690 次，其中 63 人对此回复，仅 9 个人表示相比其他人觉得幸福。而记者随机调查的十几位市民中，肯定回答“幸福”的人仅一两个。

既然“九成以上厦门人感到幸福”的调查结论遭遇九成以上厦门人的质疑，我们就可以断言，这是一个虚假的调查结论。如果这个数据确实是经过调查的，也是一个靠不住的“伪调查”。“伪调查”是怎样进行的？据国家统计局厦门调查队城镇住户处处长林芙贞介绍，这份调查是在厦门某个社区做的入户调查，“我们是随机调查统计的”。该局的工作人员笑称，之所以有那么多人说自己不幸福，“只能说他们没有在我们的抽样调查之内”。是的，你们怎么都抽到了说好话的调查户，而大量提出质疑的市民就没有被抽样呢？如果你们抽样到一个民营企业家、一个国企老总、一个厅级干部，就能算出厦门市民平均年收入是 100 万吧？

这篇文章有很多跟贴，其中一份跟贴如下：

我也是调查队的，我知道这样的调查很难很难搞准，因为被问卷调查的人当面都说好、好、好，背后谁都说不好。

现在的人真的都是两面人，问到的人没有人说实话，一方面大骂统计数据不准，另一方面调查到自己时却编