



纽约华尔街股票交易所的繁忙景象

金融海啸与金融数学

吴立昕

07-08年发生的全球金融海啸使得投资组合、金融衍生品、次级贷款等稍显专业的词汇一时间成为了坊间酒肆的流行语，而作为推动这一系列金融投资行为的理论基础之一——金融数学，也吸引了人们更多的关注。金融数学又称金融工程，是一门用数学方法研究金融投资理论的学科。在金融衍生产品（又称衍生工具）蓬勃发展的上世纪九十年代，金融数学开始进入美欧一些大学的数学或工程学系。金融数学专业人才的培养以硕士学位为主，毕业生的就业去向集中在投资银行、对冲基金和证券公司。由于其诱人的就业前景，

金融数学迅速成为了各大学炙手可热的专业。即便是在金融海啸发生之后以及余波未平的近两年，与美欧诸多金融机构元气大伤、金融产品备受诟病的情形不同，金融数学的行情倒是“一路看涨”，在中港两地，过去一二年中报读金融数学专业的人数一直在持续增加。

从理论的角度看，金融数学是介于金融与数学之间的一门交叉学科。它的核心是金融学科中的资产定价理论。由于金融数学广泛和深入地应用了概率论、随机分析、随机控



哈里·马克维茨 (Harry Markowitz) 获得 1990 年度诺贝尔经济学奖。



马克维茨 (Markowitz)



默顿 (Merton)

从应用的角度看，金融数学学科大致有三个分支，分别为投资组合理论、衍生产品定价理论和风险管理理论。它们对数学工具的依赖也有差异。

制理论、偏微分方程和数值分析等数学分支理论，它在金融学领域中独树一帜。从应用的角度看，金融数学学科大致有三个分支，分别为投资组合理论、衍生产品定价理论和风险管理理论。它们对数学工具的依赖也有差异：投资组合理论倚重随机最优控制理论，衍生产品定价理论则较依赖随机分

析，而风险管理理论的核心内容是概率论和统计学，同时它还要利用前述两个分支的理论结果。

投资组合理论

投资组合理论由哈里·马克维茨 (Harry Markowitz) 于 1952 年开创^[3]，他也因此荣获了 1990 年度的诺贝尔经济学奖。

1927 年 8 月 24 日，马克维茨出生于美国伊利诺伊州的芝加哥。尽管研究经济学并非他的童年梦想，但他 18 岁

时还是选择了芝加哥大学经济系并在两年后获得了学士学位。此后的 1950 年、1952 年，马克维茨在芝加哥大学连续获得了经济学硕士、博士学位。他最感兴趣的是不确定性经济学（当然，微观经济学与宏观经济学他也学得很好），特别是冯·诺伊曼-摩根斯坦及马夏克关于预期效用的论点，弗里德曼-萨凡奇效用函数以及萨凡奇对个人概率的辩解。马克维茨所创立的期望-方差 (Mean-Variance) 问题被认为是离散时间下投资组合理论的代表，其研究在今天看来无疑是金融经济学理论的前驱，这一工作也因此被誉为“华尔街的第一次革命”。

投资组合理论如今已经是一个硕果累累的学科，并已广泛应用于各资产管理机构。除马克维茨的学术贡献外，在连续时间理论方面，罗伯特·默顿 (Robert Merton) 于 1969 创立的最优投资-消费问题成为投资组合理论的代表^[4]：

$$\max_{c_t, x_t} E \left[\int_0^T e^{-\delta s} u(c_s) ds + e^{-\delta T} u(W_T) \right].$$

在上式中， E 代表期望， T 代表投资-消费期限， W_t 代表 t 时刻的财富， c_t 代表 t 时刻的消费， $u(c)$ 是效用函数（或幸福函数），而 δ 则是折现率。在任何时候 t ，投资人（兼消费者）



罗伯特·默顿（左，1977年诺贝尔经济奖得主）和Eric Maskin（左三，2007年诺贝尔经济奖得主）等在论坛上。

要选择消费额 c_t ，并按比重 $\{1-\pi_t, \pi_t\}$ 将余下的财富分别投资到一个股票组合和活期存款中。假设股票价格的变化服从几何布朗运动，我们可以直接推导出财富 W_t 应服从的过程：

$$dW_t = [(r + \pi_t(\mu - r))W_t - c_t]dt + W_t\pi_t\sigma dB_t.$$

这里 r 是短期利率， (μ, σ) 是股票组合的预期回报率和波动率， dB_t 是布朗运动的增量。效用函数要反映投资人的幸福感随财富增加，但增幅递减的常规，直观上它表现为一个凹函数 (concave function)。当我们的效用函数是常用的“相对风险厌恶函数”时，

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

默顿问题有简洁的解析解。默顿问题至今已经有许多推广，包括采用其它效用函数（甚至非凹非凸函数）允许交易征费、允许参数随时间变化、允许破产等等。

默顿 1944 年 7 月 31 日出生于美国一个名叫哈斯汀

小镇，这个位于纽约郊外的小镇在当时人口不足 8000 人，但却聚居了一批诺贝尔奖的获得者。默顿从小就显示出了对货币和财务问题的兴趣。1966 年，默顿毕业于哥伦比亚大学工学院并获工程数学学位，一年后又获得了加州理工学院应用数学硕士学位。在加州理工学院学习期间，默顿产生了将他感兴趣的金融学与数学分析结合起来的想法。“我想如果一个人能对经济学做出贡献，那么他将有可能影响亿万人的生活。”正是要在经济学上有所建树的决心使默顿于 1968 年在麻省理工学院经济系开始了他的学术生涯，并成为保罗·萨缪尔森的学生及助手，共同研究认股权证定价理论。默顿事后回忆，研究生阶段是他效率最高的时期。

1970 年从麻省理工学院毕业的默顿经老师莫迪格莱尼的大力举荐而留校，在斯隆管理学院教授金融学。在斯隆学院的 18 年里，默顿保持了高效的工作状态，发表了大量的学术论文，对基础研究贡献巨大。1988 年，默顿接受了哈佛大学商学院的职位，并于 1998 年成为该院的约翰和纳蒂·麦克阿瑟荣誉教授。

在斯隆学院，默顿结识了布莱克 (Fischer Black, 1938 年 1 月 11 日 -1995 年 8 月 30 号) 和日后与他同年获诺贝尔奖的斯科尔斯 (Myron S. Scholes, 1941-), 三位天才携手合作, 共同推动了期权定价理论的研究进程。



布莱克 (右) 和斯科尔斯

克 - 斯科尔斯期权定价模型。这一模型提供了人们计算选择期权价值的基本概念, 在今天已经成为全球金融市场的标准模型。在布莱克因病去世一年后, 诺贝尔基金会将经济学奖颁给了他的两位合作者, 布莱克终未获此殊荣。

布莱克是美国经济学家, 著名的布莱克 - 斯科尔斯模型的提出者之一, 他的一生充满传奇色彩。布莱克从没接受过系统的金融和经济学教育, 却在几年之内创立了现代金融学的基础。他在生活中处处规避风险, 却在学术研究和商业实践中主动寻求挑战。他轻松地获得了 (最起码在其他人的看来是这样) 芝加哥大学和麻省理工学院的终身教授头衔, 却又主动放弃, 再次投身到金融衍生品革命的大潮。他频繁地在象牙塔和华尔街之间穿梭、游弋, 理论与实践的转换在他的手里竟然是如此地容易。他与斯科尔斯和默顿共同创建了迄今为止最经典、应用最广、成就最高的模型: 布莱

■ 衍生产品的定价理论

衍生产品的定价理论起源于布莱克和斯科尔斯及默顿于 1973 年所开启的无套利定价理论 [1][5]。作为社会科学界最成功的理论之一, 无套利定价理论为其后三十多年金融衍生产品的普及奠定了理论基础。衍生品定价理论的核心是构造一个定价测度, 也称为风险中性测度。可以证明, 一旦有了这个定价测度, 衍生品现时的价格就是其 (经折现后的) 到期日的价格的期望值。让我们举股票期权为例。以 S_t 为 t 时刻的股票价格, T 为期权的到期日, r 为市场的短期利率, $f(S_T)$ 为到期日的合约价格函数, 则 t 时刻的期权价格 (即期权金) 由下式给出:

$$V(S_t, t) = E^Q \left[e^{-r(T-t)} f(S_T) | S_t \right].$$

“对冲”是定价理论的一个重要概念。期权的风险与回报是不对称的: 它风险低而回报潜力高。透过支付期权金, 投资人将风险转移给庄家, 而庄家则通常要为期权淡仓作对冲。标准的做法是买入或卖出一定数量的股票, 而这个数量正是期权价格相对于股价的变化率:

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) = E^Q \left[e^{-r(T-t)} \frac{\partial f}{\partial S}(S_T) | S_t \right].$$

在股票价格的变化服从几何布朗运动的假设下, 布莱克 - 斯科尔斯和默顿分别证明 $V(S, t)$ 满足如下偏微分方程 (PDE) 终值问题:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

$$V(S, T) = f(S)$$

这就是著名的布莱克 - 斯科尔斯 - 默顿方程。方程中的 σ 为股价的波动率。布莱克 - 斯科尔斯和默顿为偏微分方程在金融衍生品定价方面的应用打开了大门。



斯科尔斯于 1997 年从瑞典国王手里接过诺贝尔经济学奖

不难想象, 金融市场中有不少风险都无法被对冲掉,