



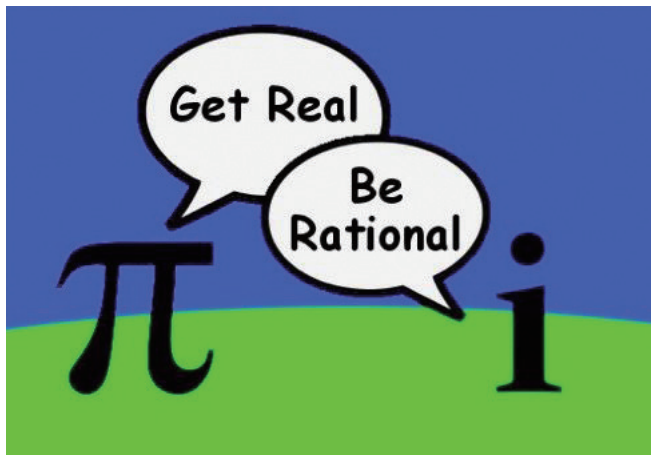
今天是 π day (3月14号), 是 nerd¹ 们的节日。在 nerd 聚集的学校和科技公司每年的 π 日通常都有类似下图那样的庆祝活动。



像 MIT (麻省理工) 这样 nerd 云集的地方, 学校的录取通知书每年都是 3月14号发。如果是发电子邮件, 还要等到 1点59分26秒才发出, 对应于 $\pi = 3.1415926\dots$, 为本来就是喜讯的录取通知书平添一份韵味。

网上的 π 日也很热闹。像微信、微博这些社交媒体通常都转发一些与 π 有关的趣图, 这样的趣图很多, 我最喜欢的是下面这幅。

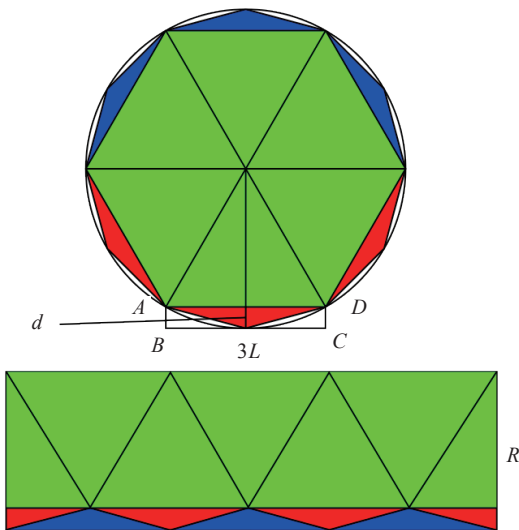
¹ nerd 与汉语中“书呆子”类似, 大众心目中的印象是老土、古板。



π 对 i 说, 现实一点 (i 是虚数, 实数在英文里叫 real numbers, real 也做现实讲, 所以非实数的虚数就不现实了), i 对 π 说, 讲道理一点 (π 是无理数, 有理数在英文里叫 rational numbers, rational 也做讲道理理解, 所以无理数的 π 就不讲道理)。

这种趣图很多, 贴不完, 我还是来贴点干货, 聊聊 π 的计算问题。

对于 π 的计算, 中国比西方国家早。祖冲之把 π 算到小数点后 7 位的记录, 西方人要到一千多年以后才打破。生在祖冲之的年代, 对 π 不是很了解, 只知道它的几何性质, 圆周率, 所以, 要算 π 只能用割圆术, 就是用正多边形逼近圆, 如下图。这样算很辛苦, 据说祖冲之算到两万多条边的多边形。



祖冲之把 π 算到小数点后 7 位所用的方法叫割圆术。割圆术简单说起来就是从 n 边形的边长求 $2n$ 边形的边长。 n 足够大时, 边长等于 2π 。用现在的程序来算, 比如 MATLAB, 就是下面这两行迭代。

```
x = 1/4; for i = 1:12, x = (1 - sqrt(1 - x))/2; end,
pi = 2^12*6*sqrt(x)
```

上面的代码是从六边形开始，加倍 12 次后精确 π 到小数点后第 7 位。通常说祖冲之算到 24576 边形，这个 24576 就是 $2^{12} \times 6$ 。

这个割圆术不是祖冲之发明的，而是三国时代的数学家刘徽发明的。这样说起来，比祖冲之又早了好几百年。祖冲之真正的贡献是密率，他说 π 接近于 $355/113 (= 3.1415929\cdots)$ ，相当接近啊。华罗庚说祖冲之能搞出密率说明他懂连分数。这点很不容易，所以有外国数学家提出把这个密率叫祖率。顺便说一句，除了密率外，还有一个叫约率， $\pi = 22/7 (= 3.14)$ ，与我们把 3 月 14 号叫 π 日很符合。还有人因为这个约率，把 7 月 22 日叫近 π 日。

后来人们知道一些 π 的数字性质后，算起来就相对容易一点。基本都是用级数公式算。比如下面的级数公式

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

其实，上面的第一个公式还是 π 的几何性质，用微积分证明这个公式要用到三角函数。记得我读大学时第一次证明这个公式的时候惊讶了半天，想不到一个纯粹的几何量（圆周率）会用一串数字表达出来。后来学的多一点，发现上面那些公式实际上有通项公式，用黎曼 ζ 函数表示

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

其中 B_{2n} 是所谓的伯努利数。

这就开始与数论有关了。用级数算 π 的公式数不胜数，下面是一些与奇数指数有关的一类。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^2 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^3 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^4 = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^5 = \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}$$

一个值得特别提一下的是欧拉公式。我们都知道，调和级数发散，但如果在调和级数中改一些加号为减号，就可以收敛到 π 。至于改哪些项，这就与那个数的整数分解有关了，纯数论的东西。