青年评述

弱有限元方法在线弹性问题中的应用[*1)]

张 然[2)]
(吉林大学数学学院, 长春 130012)

摘 要

本文考虑弱有限元 (简称 WG) 方法在线弹性问题中的应用. WG 方法是传统有限元方法的推广, 用于偏微分方程的数值求解. 和传统有限元一样, 它的基本思想源于变分原理. WG 方法的特点是使用在剖分单元内部和剖分单元边界上分别有定义的分片多项式函数 (即弱函数) 作为近似函数来逼近真解, 并针对弱函数定义相应的弱微分算子代入数值格式进行计算. 除此之外, WG 方法允许在数值格式中引进稳定子以实现近似函数的弱连续性. WG 方法具有允许使用任意多边形或多面体剖分, 数值格式与逼近函数构造简单, 易于满足相应的稳定性条件等优点. 本文考虑 WG 方法在求解线弹性问题中的应用. 围绕线弹性问题数值求解中常见的三个问题, 即: 数值格式的强制性, 闭锁性, 应力张量的对称性介绍 WG 方法在线弹性问题求解中的应用.

关键词: 弱有限元方法, 线弹性方程, 闭锁现象, 混合有限元方法

MR (2010) 主题分类: 65D17, 65N30, 65N15

1. 引 言

有限元方法作为一种求解偏微分方程的数值计算方法, 在工程计算中扮演着重要的角色. 在 20 世纪 60 年代中期, 以冯康先生为代表的中国学者独立于西方学者发展了有限元方法的数学理论, 使其成为一套系统的数值计算方法. 近年来, 适用于任意多边形或多面体网格剖分的非标准有限元法得到了学者们的关注与研究, 如间断有限方法 [2,19] (the discontinuous Galerkin methods), 拟差分法 [14] (mimetic finite difference method), 虚拟有限元方法 [8] (virtual element method), 以及本文讨论的弱有限元 (weak Galerkin finite element 简称 WG) 方法 [57–59] 等. 其中低阶拟差分法与 WG 方法结构类似但不同, 任意阶拟差分法结构与 WG 方法结构的差异较大, 间断有限元方法使用近似函数在剖分单元交界面处的跳跃以及稳定子来刻画近似函数的连续性, 虚拟有限元方法则将单元边界拓展到单元内部进行处理从而刻画近似函数的连续性, WG 方法与杂交间断有限元方法 [19] (HDG) 都使用边界元函数来刻画近似函数的弱连续性, 两者结构有一定的相似性, 但两种方法的构造理念不同, 且它们的数值格式一般情况下不等价, 例如, 对于一般变系数的二阶椭圆问题两者不等价. 目前, 在复杂工程问

[*] 2020 年 1 月 4 日收到.

[1)] 国家自然科学基金 (11971198、11726102、11771179) 和中国教育部长江学者计划以及吉林大学符号计算与知识工程教育部重点实验室等资助.

[2)] 作者简介: 张然, 吉林大学数学学院教授. 1999 年和 2004 年在吉林大学分别获得学士和博士学位, 2008 年任吉林大学教授. 主要研究领域包括有限元方法、随机微分、积分方程数值解、多尺度分析及应用. 曾入选教育部新世纪人才奖励计划 (2013)、入选教育部 "长江学者奖励计划" 青年学者 (2016) 等. 截止目前, 在学术期刊上发表论文 60 余篇.

题的高效、精确求解方面, 有限元方法及其相关的各种新的数值计算方法层出不穷地涌现, 仍处在百花齐放的阶段.

本文研究使用 WG 方法求解线弹性问题. WG 方法最早由王军平和叶秀在 2011 年提出, 该方法的区域剖分采用任意多边形或多面体剖分 [42], 而逼近函数空间选取弱函数空间, 其元素为分别在剖分单元内部和单元边界有定义的间断函数. 同时, WG 方法可以引进稳定子以刻画弱函数在单元之间的联系. 传统有限元方法在构造近似函数空间时, 主要困难之一来自于函数的连续性. 而在 WG 方法中, 近似函数的连续性由边界函数和稳定子来刻画. 由于边界函数和稳定子可以根据需要定义, 因此 WG 方法在网格的选取和基底的构造上具有很大的灵活性. 在过去的几年里, WG 方法受到国内外许多学者的关注与研究, 并取得了丰富的研究成果. 如: WG 方法的两水平格式 [33], WG 方法的多重网格法 [18,49], WG 方法的先验、后验误差估计 [36,40], WG 方法的后处理技术 [65], WG 方法的极大值原理 [60], 使用最小二乘法对 WG 方法进行改进 [43], WG 方法近似函数空间选取规则研究 [56], 原始 - 对偶 WG 方法 [54], 旋度连续 WG 方法 [52], 使用 WG 方法求解: 分数阶扩散方程 [82], 随机交界面光栅问题 [7], 变分不等式问题 [20,47], 交界面问题 [45], 非定常对流问题 [21], 特征值问题 [71–73], 不可压流问题 [79] 等. 除此外 WG 方法也被应用于求解各种经典的偏微分方程问题. 如：二阶椭圆方程 [29,35,78], Darcy 方程 [37,68], Navier-Stokes 方程 [28,38,75,80], Stokes 方程 [16,34,39,59,62,66,76,81], 抛物方程 [83,84], Brinkman 方程 [41,67,74], 双调和方程 [44,77], 多孔线弹性方程 [51], Cahn-Hilliard 方程 [61] 等. 本文关注 WG 方法在求解线弹性问题中的应用 [17,23,55,63,64,70]. 文献 [70] 与文献 [23] 分别在三角形或四面体和四边形或六面体单元上考虑线弹性问题, 并且通过 RT 元定义近似函数的微分, 得到了稳定的数值格式并证明了数值格式的 “无闭锁” 性质. 特别的, 这两种数值格式不使用稳定子. 文献 [55] 中作者对满足形状正则性条件的网格剖分构造了具有 “无闭锁” 性质的数值格式. 文献 [17] 与文献 [64] 讨论使用 WG 方法求解混合形式线弹性问题, 虽然两者数值格式不同, 但都实现了满足强对称性应力张量的求解. 篇幅原因, 本文不能对已有工作进行全面地描述, 因此本文将围绕线弹性问题数值求解中常见的几个问题选取已有结果中具有代表性的解决方法对 WG 方法在线弹性问题中的应用问题进行阐述.

线弹性问题研究的是在一定假设条件下, 弹性体受外力作用时体内的应力, 应变和位移之间的关系. 它在生产和生活中有着十分广泛的应用, 如房屋和桥梁的设计等都涉及到弹性力学分析. 某些弹塑性材料, 如汽车、飞机的轮胎在变形的初期也满足线弹性方程. 而线弹性方程本身结构复杂, 在数值求解中存在许多困难. 本文旨在介绍 WG 方法在解决线弹性问题中数值格式的强制性、数值解与真解之间误差的参数依赖性、混合形式线弹性方程中应力张量的对称性三个问题上的应用.

定义 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ 为具有 Lipschitz 连续边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的有界区域, 且 Γ 的两个子集 $\Gamma_N, \Gamma_D \neq \emptyset$ 满足 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. 记弹性体所受外力的单位体密度为 $\mathbf{f}$. 线弹性问题考虑: 求位移 $\mathbf{u}$ 满足

$$-\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad 在\ \Omega, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}}, \quad 在\ \Gamma_D, \tag{1.2}$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{t}}, \quad 在\ \Gamma_N, \tag{1.3}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界 Γ_N 的单位外法方向, $\sigma(\mathbf{u})$ 为应力张量. 对于线性、均匀、各向同性弹性体, 应