2020 年 2 月 计 算 数 学 第 42 卷第 1 期
Feb., 2020 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.42, No.1

中立型随机延迟微分方程分裂步 θ 方法的强收敛性[*1)]

彭 捷 代新杰 肖爱国 卜玮平
(湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105)

摘 要

中立型随机延迟微分方程常出现在一些科学技术和工程领域中. 本文在漂移系数和扩散系数关于非延迟项满足全局 Lipschitz 条件, 关于延迟项满足多项式增长条件以及中立项满足多项式增长条件下, 证明了分裂步 θ 方法对于中立型随机延迟微分方程的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 数值实验也验证了这一理论结果.

关键词: 中立型随机延迟微分方程; 分裂步 θ 方法; 强收敛; 多项式增长

MR (2010) 主题分类: 34K40, 34K50, 60H35, 65L20

1. 引 言

作为一类重要的随机微分方程, 中立型随机延迟微分方程 (NSDDEs) 不仅仅依赖于现在和过去的状态, 还依赖于过去一段时间内的变化率. 该类方程广泛地出现于生物学、化工、神经网络、空气动力学和工程技术等领域中 [1–4].

本文主要考虑以下中立型随机延迟微分方程:

$$d[x(t)-N(x(t-\tau))]=f(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}B(t),\quad t\in[0,T]. \tag{1.1}$$

当 $t\in[-\tau,0]$ 时, 初始值 $x(t)=\varphi(t)\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\ R^n)$. 这里 T 和 τ 为正常数,

$$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times d},\quad N:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

都是 Borel 可测的实值函数, $B(t)$ 是 d- 维布朗运动.

由于大部分的 NSDDEs 都很难得到真解的表达式, 所以研究其数值方法就显得尤为重要. 大部分数值分析研究工作都是在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件 [5–7] 下进行的, 然而这两个条件是比较苛刻的, 许多 NSDDEs 模型并不满足这些条件, 所以有必要在更一般的条件下进行研究. 在数值分析中, 收敛性理论一直是研究的中心问题之一. Zhang 和 Gan [5] 在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件下证明了求解 NSDDEs 的一类漂移隐式格式的强收敛性. Ji 和 Yuan [8] 对于 NSDDEs 在非全局 Lipschitz 条件下, 研究了驯服 Euler 方法的强收敛性. Gan 等人 [9] 在全局 Lipschitz 连续和线性增长条件下研究了针对非线性 NSDDEs 的随机 θ 方法, 并证明了其均方收敛阶为 $\frac{1}{2}$. Milošević [10] 对于高度非线性的 NSDDEs 在 Khasminskii 型条

* 2018 年 2 月 8 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11671343, 11601460), 湖南省自然科学基金 (2018JJ3491) 和湖南省研究生科研创新重点项目 (CX20190420) 资助.

件下研究了 Euler-Maruyama (EM) 方法的依概率收敛性. Milošević [11] 对于 NSDDEs 在非线性增长的条件下研究了向后 EM 方法的依概率收敛性. Ji 等人 [12] 在漂移系数和扩散系数关于非延迟项满足全局 Lipschitz 条件, 关于延迟项满足多项式增长条件以及中立项满足多项式增长条件下, 证明了 NSDDEs 的 EM 方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. Yan 等人 [13] 研究了 NSDDEs 的分裂步 θ 方法, 这里的漂移系数和扩散系数对于非延迟项都满足全局 Lipschitz 条件, 而对延迟项都是高度非线性, 且中立项满足压缩条件. Tan 和 Yuan [14] 在与 [13] 类似的条件下讨论了 θ 方法的强收敛性; 但他们的中立项满足更一般的多项式增长条件. 对于中立型随机泛函微分方程 (NSFDEs), Wu 和 Mao [15] 在漂移系数和扩散系数都满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件以及中立项满足压缩映射条件下, 研究了对于 NSFDEs, EM 方法的强收敛理论. Jiang 等人 [16] 在漂移系数和扩散系数满足全局 Lipschitz 条件以及中立项满足压缩映射条件下, 证明了对于 NSFDEs, EM 方法是 p 阶矩强收敛的. Zhou 和 Fang [17] 在漂移系数和扩散系数都满足局部 Lipschitz 条件和多项式增长条件以及中立项满足压缩映射条件下, 证明了对于 NSFDEs, EM 方法是依概率收敛的. 有关 NSDDEs 稳定性分析的研究成果, 可参考文献 [18-23].

分裂步 θ (简称 SST) 方法是一类求解随机微分方程常用的数值方法. 目前已有 3 种不同格式的 SST 方法 [6, 20, 24] 被研究, 其中, 由 Ding 等人 [6] 提出的用于求解随机微分方程的 SST 方法为:

$$\begin{cases} y_k = z_k + \theta f(y_k)\Delta + (1-\theta)f(z_k)\Delta, \\ z_{k+1} = y_k + g(y_k)\Delta B_k, \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $\theta \in [0,1]$, 当 $k=-m,\ -m+1,\ \cdots,\ 0$ 时, $z_k = y_k = \varphi(k\Delta)$, $\Delta B_k = B((k+1)\Delta) - B(k\Delta)$ 表示布朗运动增量, 进一步, 他们证明了此方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$. 当漂移函数和扩散函数关于延迟项和非延迟项均满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件时, Cao 等人 [7] 证明了该方法求解随机延迟微分方程 (SDDEs) 是均方收敛的. 然而, 该方法目前还没有被应用于求解 NSDDEs, 这就是本文的出发点. 为了表明该方法适用于求解更一般的问题, 本文将考虑比线性增长条件更一般的多项式增长条件.

本文结构如下: 第二节列出有关漂移项、扩散项和中立项的假设条件; 第三节证明初值问题 (1.1) 的真解和应用 SST 方法 (2.13a-2.13b) 求解该问题的数值解的 p 阶矩有界性; 第四节给出该方法的强收敛阶为 $\frac{1}{2}$ 的详细证明; 第五节通过四个不同情形的数值实验进一步验证理论结果的正确性; 最后一节是本文的工作总结与展望.

2. 预备知识

令 $(\Omega, \mathcal{F}_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 为一个带有常规 σ- 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间, $B(t)$ 是定义在该空间上 $\mathcal{F}_t$- 可测的布朗运动. 为了确保方程 (1.1) 解的存在唯一性以及研究其数值方法的强收敛性, 引入函数 $V_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都存在正常数 K_i 和 q_i 使得

$$0 \leq V_i(x,y) \leq K_i(1 + |x|^{q_i} + |y|^{q_i}), \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.1}$$

成立. 进一步假设漂移项 $f(x,y)$, 扩散项 $g(x,y)$ 以及中立项 $N(x)$ 分别满足以下假设条件:

假设 2.1 [13,14]. 对任意的 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^n$, 存在正常数 $L_1,\ L_2$ 使得

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq L_1|x_1 - x_2| + V_1(y_1,y_2)|y_1 - y_2| \tag{2.2}$$