# 广义鞍点问题的改进的类 SOR 算法*1)

张 纯
(南京师范大学数学科学学院, 南京 210023;
中国人民解放军陆军工程大学基础部, 南京 211101)

贾泽慧
(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

蔡邢菊
(南京师范大学数学科学学院, 南京 210023)

韩德仁
(北京航空航天大学数学科学学院, 北京 100191)

**摘 要**

针对广义鞍点问题, 本文提出了一个改进的类逐次超松弛迭代算法, 在较弱的条件下, 分析了算法的收敛性及线性收敛率. 新算法的每步计算量与已有的算法类似, 都是需要 (近似) 求解线性方程组, 但新算法有更好的灵活度通过合适地选取参数矩阵, 每一步子问题可以容易地求解, 甚至可以有闭式解 (closed-form solution). 数值实验结果显示了新算法的有效性.

**关键词:** 鞍点问题; 类 SOR 算法; 全局收敛性; 收敛率
**MR (2000) 主题分类:** 65F10, 65H10

## 1. 引 言

我们考虑如下的广义鞍点问题:

$$\mathcal{A}u := \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是对称正定矩阵, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非零对称半正定矩阵, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}(m > n)$ 是列满秩矩阵, $x, f \in \mathbb{R}^m$, $y, g \in \mathbb{R}^n$. 为讨论方便, 我们记

$$u := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(u) := \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

假设 (1.1) 的解集 $\Omega^* = \{u \mid F(u) = 0\}$ 非空. 我们用 $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{++}$ 分别表示实数, 非负实数, 正实数, 用 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 分别表示 $n$ 维实向量空间和 $m\times n$ 维实矩阵空间. 对矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 我们用 $M^T$, $v^T$ 分别表示 $M$, $v$ 的转置, $\|M\| = \sqrt{\lambda_{\max}(M^TM)}$ 表示相应的

* 2018 年 3 月 7 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11625105, 11926358, 11871279, 11571178, 11801279), 江苏省自然科学基金 (BK2018078), 南京信息工程大学科研启动基金 (2017r059).

范数. 对向量 $u, v \in \mathbb{R}^n$, 用 $u^T v$ 表示 $u, v$ 的内积, $\|u\| = \sqrt{u^T u}$ 表示相应的范数. 对矩阵 $X,\ Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 用 $X \succ Y$ 表示矩阵 $X - Y$ 正定. 大规模广义鞍点问题应用于计算科学与工程的许多领域. 如参数识别问题 [11,15], 约束加权最小二乘问题 [7,10], 内点法的鞍点系统 [4], 最优控制 [6,12], 电路与网络 [5,16] 等等.

对于广义鞍点问题, 当 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ 是大型稀疏矩阵时, 迭代解法将比直接求解更为有效. 当 $C = 0$ 时, 广义鞍点问题 (1.1) 退化为鞍点问题, 对这类问题的迭代解法已经有相当多的研究, 比如参数化非精确 Uzawa 方法 (简称 PIU 算法) [8], 广义逐次超松弛迭代算法 (简称 GSOR 算法) [2], 局部对称斜对称分裂的迭代算法 (简称 HLSS 迭代算法) [13] 等. 当 $C \neq 0$ 时, 也有相当多的研究 [3,14] 等.

白中治等人 [3] 将求解鞍点问题的参数化非精确 Uzawa 方法 [2] 推广到求解广义鞍点问题中去, 提出了广义的 PIU 算法 (简称 GPIU 算法). 并在矩阵 $A$ 正定, $B$ 列满秩, $C = O$ 或 $C = \kappa Q$ (其中 $Q$ 是奇异值分解矩阵 $B^T P^{-1} B + C$ 的近似矩阵), $\kappa$ 是非零实常数, $P$ 正定及相关参数假设条件下, 给出了 GPIU 算法的收敛性证明, 其算法和迭代的矩阵形式如下:

**Algorithm 1:** 求广义鞍点问题 (1.1) 的 GPIU 算法

**Input**: 设 $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定矩阵, 非零常数 $\eta, \theta \in \mathbb{R}$, 给定初始向量 $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 迭代误差 ERR, 误差界 $\varepsilon$, 最大迭代次数 $\mathrm{K}_{\max}$.

**while** ERR $> \varepsilon$ 且 $k < \mathrm{K}_{\max}$ **do**

  $x_{k+1} = x_k + \eta P^{-1}(f - Ax_k - By_k)$

  $y_{k+1} = y_k + \theta Q^{-1}(B^T x_{k+1} - Cy_k - g)$

**end**

将 GPIU 算法写成矩阵的形式, 即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\eta}P & O \\ -B^T & \dfrac{1}{\theta}Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\eta}P - A & -B \\ O & \dfrac{1}{\theta}Q - C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}.$$

蒋美群等人 [13] 通过采用分裂预处理的方法提出了广义的修正局部对称斜对称分裂的迭代算法 (简称 GMLHSS 迭代算法), 其中 $A$ 可以为非对称矩阵, 但 $H := \frac{1}{2}(A + A^T)$ 正定, $B$ 为列满秩, $C$ 为对称半正定矩阵. 对矩阵 $C$ 进行分解

$$C = \begin{pmatrix} E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^T \\ F^T \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

则相应地将矩阵 $B$ 转化成 $(B_1,\ B_2)$, 其算法和矩阵迭代格式如下:

将 GMLHSS 算法写成矩阵的形式, 即

$$\begin{pmatrix} Q_1 + H & O & O \\ O & Q_2 + D & O \\ -B_2^T & O & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 - S & -B_1 & -B_2 \\ B_1^T & Q_2 & O \\ O & O & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$