

# 正则化 HSS 预处理鞍点矩阵的特征值估计<sup>\*1)</sup>

曹 阳

(南通大学交通学院, 南通 226019)

陈莹婷

(南通大学理学院, 南通 226019)

## 摘 要

最近, Bai 和 Benzi 针对鞍点问题提出了一类正则化 HSS (Regularized Hermitian and skew-Hermitian splitting, RHSS) 预处理子 (BIT Numer. Math., 57 (2017) 287–311). 为了进一步分析 RHSS 预处理子的效果, 本文重点研究了 RHSS 预处理鞍点矩阵特征值的估计, 分析了复特征值实部和模的上下界、实特征值的上下界, 还给出了特征值均为实数的充分条件. 当正则化矩阵取为零矩阵时, RHSS 预处理子退化为 HSS 预处理子, 分析表明本文给出的复特征值实部的界比已有的结果更精确. 数值算例验证了本文给出的理论结果.

**关键词:** 鞍点矩阵; 正则化 HSS 预处理子; 特征值估计

**MR (2010) 主题分类:** 65F10

## 1. 引 言

考虑如下大型稀疏鞍点问题:

$$Ax \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \equiv b, \quad (1.1)$$

其中  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitian 正定,  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ( $m \leq n$ ) 行满秩,  $y, f \in \mathbb{C}^n$ ,  $z, g \in \mathbb{C}^m$ . 在上述假设条件下, 由 [1, 引理 2.1] 和 [7, 定理 3.1] 可知, 系数矩阵  $A$  非奇异, 从而鞍点问题 (1.1) 具有唯一解. 鞍点问题 (1.1) 广泛来源于许多实际问题, 如二次优化问题, 计算流体力学, 计算弹性力学, 散乱数据插值等等, 有关其应用背景介绍可参考文献 [7].

当鞍点问题 (1.1) 的规模较大时, 通常采用迭代法求解. 常见的迭代法包括经典的 Uzawa 方法 [5, 7, 8, 13], HSS 迭代法 [3, 4], 位移分裂迭代法 [10], Krylov 子空间迭代法 [16] 等. 为了加快收敛速度, 通常需事先根据矩阵的结构构造出一个好的预处理子, 不仅能减少总的迭代步数, 还能大量降低计算工作量. 最近, Bai 和 Benzi [2] 针对鞍点问题 (1.1), 首先引入一个正则化 Hermitian 半正定矩阵  $Q$ , 然后将鞍点矩阵  $A$  为分裂成

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ -B & -Q \end{pmatrix} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{S}_- \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ -B & Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} = \mathcal{S}_+ + \mathcal{H}_-, \end{aligned}$$

\* 2018年4月13日收到.

<sup>1)</sup> 基金项目: 国家自然科学基金项目 (11771225) 资助.

再利用交替方向迭代法的思想提出了一个正则化 Hermitian 和 skew-Hermitian 分裂 (RHSS) 迭代法

$$\begin{cases} (\alpha I + \mathcal{H}_+)x^{k+\frac{1}{2}} = (\alpha I - \mathcal{S}_-)x^k + b, \\ (\alpha I + \mathcal{S}_+)x^{k+1} = (\alpha I - \mathcal{H}_-)x^{k+\frac{1}{2}} + b, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

其中  $\alpha > 0$  为一个实参数,  $I$  为单位矩阵, 同时在 RHSS 迭代法的基础上构造出一个新的矩阵分裂预处理子, 即 RHSS 预处理子

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{RHSS}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}I & 0 \\ 0 & (\alpha I + Q)^{-1} \end{pmatrix} (\alpha I + \mathcal{H}_+) (\alpha I + \mathcal{S}_+) \\ &= \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} \alpha I + A & 0 \\ 0 & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I & B^* \\ -B & \alpha I + Q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

当正则化矩阵  $Q$  取为零矩阵时, RHSS 迭代法 (1.2) 退化为著名的 HSS 迭代法<sup>[4]</sup>, RHSS 预处理子退化为 HSS 预处理子<sup>[4,6]</sup>. 值得说明的是, HSS 迭代法首先是由 Bai 等人为求解一类非 Hermitian 正定线性方程所提出的无条件收敛的迭代方法. 尔后吸引了大量学者对 HSS 迭代法进行了研究, 包括提出了 HSS 迭代法和 HSS 预处理子的改进形式<sup>[3,9,11]</sup>, 最优参数的选取<sup>[3]</sup>, 预处理矩阵的特征值估计<sup>[12,14,15,17]</sup>等.

在 [2] 中, 作者证明了 RHSS 迭代法的无条件收敛性, 从而进一步推广了 HSS 迭代法的收敛性理论. 此外, Bai 和 Benzi 还分析了当参数  $\alpha \rightarrow 0^+$  时, RHSS 预处理鞍点矩阵  $\mathcal{P}_{\text{RHSS}}^{-1}A$  的特征值聚集在  $(0, 0)$  和  $(2, 0)$  附近. 相比 HSS 迭代法, RHSS 迭代法的优势在于采用不精确计算时, 内迭代拥有更快的收敛速度, 因而对于大规模问题 RHSS 迭代法更为有效. 但与 HSS 迭代法一样, RHSS 迭代法的收敛速度与参数  $\alpha$  的选取密切相关, 正如文 [2] 中所介绍的, 参数  $\alpha$  的选取通常不能很小, 在实际计算中最优参数有可能很大. 因此, 文 [2] 中所给出的当  $\alpha \rightarrow 0^+$  时 RHSS 预处理鞍点矩阵  $\mathcal{P}_{\text{RHSS}}^{-1}A$  的谱分析不能真实反映 RHSS 预处理子的性质.

在本文中, 我们对 RHSS 预处理鞍点矩阵  $\mathcal{P}_{\text{RHSS}}^{-1}A$  的特征值分布进行了详细分析, 给出了所有复特征值实部和模的上下界、实特征值的上下界, 还给出了特征值均为实数的充分条件. 特别的, 当正则化矩阵  $Q$  取为零矩阵时, RHSS 预处理子退化为 HSS 预处理子, 分析表明本文给出的复特征值实部的界比 [15] 和 [17] 中给出的关于 HSS 预处理鞍点矩阵复特征值实部的界更精确. 具体的理论结果在第二节中给出. 在第三节中, 我们用数值算例验证了本文给出的理论结果.

## 2. RHSS 预处理鞍点矩阵特征值的估计

为了给出 RHSS 预处理鞍点矩阵  $\mathcal{P}_{\text{RHSS}}^{-1}A$  特征值的估计范围, 我们先给出一些记号. 用  $\lambda_n$  和  $\lambda_1$  表示 Hermitian 正定矩阵  $A$  的最小和最大特征值,  $\sigma_m$  和  $\sigma_1$  分别表示矩阵  $B$  的最小和最大奇异值,  $\gamma_m (\geq 0)$  和  $\gamma_1$  分别表示 Hermitian 半正定矩阵  $Q$  的最小和最大特征值. 用  $Re(\theta) + iIm(\theta)$  表示复数  $\theta$ , 其中  $Re(\theta)$  和  $Im(\theta)$  分别表示  $\theta$  的实部和虚部,  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位.  $|\theta|$  表示复数  $\theta$  的模.

RHSS 预处理鞍点矩阵  $\mathcal{P}_{\text{RHSS}}^{-1}A$  特征值估计可由如下广义特征值问题推导出

$$Aw = \eta \mathcal{P}_{\text{RHSS}} w, \quad (2.1)$$