2020 年 2 月 计 算 数 学 第 42 卷第 1 期
Feb., 2020 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.42, No.1

求解加权线性最小二乘问题的一类预处理 GAOR 方法[*1)]

王 丽
(西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070)

罗玉花
(兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000)

王广彬 [2)]
(青岛农业大学数学系, 青岛 266109)

摘 要

为了快速求解一类来自加权线性最小二乘问题的 2×2 块线性系统, 本文提出一类新的预处理子用以加速 GAOR 方法, 也就是新的预处理 GAOR 方法. 得到了一些比较结果, 这些结果表明当 GAOR 方法收敛时, 新方法比原 GAOR 方法和之前的一些预处理 GAOR 方法有更好的收敛性. 而且, 数值算例也验证了新预处理子的有效性.

关键词: 加权线性最小二乘问题; 预处理子; GAOR 方法; 比较定理

MR (2010) 主题分类: 65F10, 65F15

1. 引 言

加权线性最小二乘问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}(Ax-b)^TW^{-1}(Ax-b) \tag{1.1}$$

有很广泛的应用背景, 典型的应用是数学模型中的参数估计 [4,12,13], 这里 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$ 是已知的, 方差 - 协方差矩阵 $W\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定的. 为了求解加权线性最小二乘问题 (1.1), 人们常常需要求解线性系统

$$Hy=f, \tag{1.2}$$

其中系数矩阵

$$H=\begin{bmatrix} I_p-B & U \\ L & I_q-C \end{bmatrix}$$

是可逆的, 这里 I_i 表示 i 阶的单位矩阵且

$$B=(b_{ij})_{p\times p},\ C=(c_{ij})_{q\times q},\ L=(l_{ij})_{q\times p},\ U=(u_{ij})_{p\times q}.$$

一些经典的分裂迭代法, 如 Jacobi 方法, Gauss-Seidel 方法, SOR 方法 [7,11,14], AOR 方法 [4,12] 等, 可以求解线性系统 (1.2), 但这些方法的缺点是都需要求矩阵 I_p-B 和 I_q-C 的逆, 这在

* 2018 年 5 月 23 日收到.

1) 基金项目: 西北师范大学数学与统计学院大学生创新计划; 山东高校科技计划 (J16LI04).

2) 通讯作者: 王广彬, E-mail: wguangbin750828@sina.com.

实际计算时是很费时间的. 为了避免求矩阵 I_p-B 和 I_q-C 的逆, Yuan 等人 [12] 提出了求解线性系统 (1.2) 的 GAOR 方法, Darvishi 和 Hessari[3] 研究了当系数矩阵是对角占优矩阵时 GAOR 方法的收敛性. 若将 (1.2) 系数矩阵 H 分裂为

$$H=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B & -U \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

则求解 (1.2) 的 GAOR 方法的迭代格式定义为 [12]

$$y^{(k+1)}=T_{\omega\gamma}y^{(k)}+wg,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.3}$$

其中

$$\begin{aligned} T_{\omega\gamma}&=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ \gamma L & I_q \end{bmatrix}^{-1}\left\{(1-\omega)I_n+(\omega-\gamma)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix} B & -U \\ 0 & C \end{bmatrix}\right\} \\ &=\begin{bmatrix} (1-\omega)I_p+\omega B & -\omega U \\ \omega(\gamma-1)L-\omega\gamma LB & (1-\omega)I_q+\omega C+\omega\gamma LU \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

是迭代矩阵,

$$g=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -\gamma L & I_q \end{bmatrix}f.$$

这里, ω 和 γ 为实参数且 $\omega\neq 0$.

为了加快 GAOR 方法的收敛速度, 很多作者考虑了求解线性系统 (1.2) 的预处理 GAOR 方法, 参见 [2, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 16]. 预处理 GAOR 方法的基本思想是用 GAOR 方法求解与 (1.2) 等价的预处理线性系统

$$PHy=Pf,$$

这里的非奇异矩阵 P 称为预处理子. 基于矩阵 H 的结构, 预处理矩阵 PH 可表示为

$$PH=\begin{bmatrix} I_p-\widehat{B} & \widehat{U} \\ \widehat{L} & I_q-\widehat{C} \end{bmatrix},$$

因此求解 (1.2) 的预处理 GAOR 方法为

$$y^{(k+1)}=\widehat{T}_{\omega\gamma}y^{(k)}+w\widehat{g},\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.5}$$

其中

$$\widehat{T}_{\omega\gamma}=\begin{bmatrix} (1-\omega)I_p+\omega\widehat{B} & -\omega\widehat{U} \\ \omega(\gamma-1)\widehat{L}-\omega\gamma\widehat{L}\widehat{B} & (1-\omega)I_q+\omega\widehat{C}+\omega\gamma\widehat{L}\widehat{U} \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\widehat{g}=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -\gamma\widehat{L} & I_q \end{bmatrix}Pf.$$

本文在文献 [9, 17] 的基础上提出了两种新的预处理子用来加速 GAOR 方法求解线性系统 (1.2) 的收敛速度, 建立了一系列比较定理, 通过比较定理说明新预处理子的有效性. 最后, 数值算例说明理论分析的正确性及新预处理子的有效性.