2020 年 2 月　　计 算 数 学　　第 42 卷第 1 期
Feb., 2020　　MATHEMATICA NUMERICA SINICA　　Vol.42, No.1

自适应稀疏伪谱逼近新方法*

林济铿　袁恺明　申丹枫
(同济大学电子与信息工程学院, 上海 201804)
罗萍萍
(上海电力大学电气工程学院, 上海 200090)
刘阳升
(同济大学电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘　要

自适应稀疏伪谱逼近法是广义混沌多项式类方法的最新进展, 相对于其它方法具有计算精度高、速度快的优点. 但它仍存在如下缺点: 1) 终止判据对逼近误差的估计精度偏低; 2) 只适用于单输出问题. 本文提出了适用于多输出问题且具有更高逼近精度的自适应稀疏伪谱逼近新方法. 本文首先提出了新型终止判据及基于此新型终止判据的自适应稀疏伪谱逼近新方法, 并以命题的形式证明了新型终止判据相比于现有终止判据具有更高的估计精度, 从而使基于此的逼近函数精度更接近于预期精度; 进而, 本文基于指标集的统一策略和新型终止判据, 提出了适用于多输出问题的自适应稀疏伪谱逼近新方法, 该方法因能充分利用各输出变量的抽样结果, 具有比将单输出方法直接推广到多输出问题更高的计算效率. 多个算例验证了本文所提出新方法的有效性和正确性.

关键词: 自适应稀疏伪谱逼近法; 终止判据; 逼近误差; 单输出; 多输出
MR (2010) 主题分类: 65D15, 65Y20

1. 引　言

不确定性传递问题 (uncertainty propagation) 是一类研究如何量化由输入不确定性传递到的输出不确定性的问题. 蒙特卡罗类方法、摄动法和矩方程法是三类传统的不确定性传递问题的分析方法, 广义混沌多项式法 (generalized polynomial chaos, gPC) 则是近些年提出的新型分析方法.

蒙特卡罗类方法以蒙特卡罗法 (Monte Carlo method, MCM) [1] 为代表, 其收敛速度与随机变量维数无关, 故可方便地应用于大规模系统, 但因其误差与抽样数的平方根成反比, 当计算精度要求很高时所需的抽样次数很大、计算时间很长. 摄动法 (perturbation method) [2] 是一类非抽样方法, 它在随机变量的均值附近对输入输出随机变量间的函数关系进行泰勒展开, 无需抽样就可快速求出输出变量的期望、方差等各阶矩, 但由于其只能进行低阶泰勒展开 (最多 2 阶, 超过 2 阶时因展开过程过于复杂而无法进行), 所以无法完全反映输出随机变量与输入随机变量的函数关系, 因而当输入随机变量波动范围较大时以及输入输出函数关系的非线性程度较大时, 其所求取的各阶矩存在较大的误差. 矩方程法 (moment equation method) [3] 从表示输入输出函数关系的系统方程出发, 直接推导含有输出随机变量各阶矩的方程组, 然后求解该方程组而得到输出随机变量的各阶矩. 该方法的优点在于能准确给出不超过既定阶次

* 2018 年 6 月 22 日收到.

的各阶矩的表达式, 但由于在绝大多数情况下其所给出的各阶矩的表达式中会出现阶次比既定阶次更高的矩, 为了能够具体算出不超过既定阶次的各阶矩, 就不得不对高于既定阶次的矩进行一定的假设, 相应不可避免地引入了误差.

广义混沌多项式法 [4–6](generalized polynomial chaos, gPC) 是一种基于多项式函数逼近理论的不确定性传递问题的分析方法, 其思想与前面三类方法完全不同. 该类方法的基本思想是采用以输入随机变量为自变量的正交多项式基函数的线性组合逼近输入输出变量间的函数关系, 从而可快速地求解出输出变量的各阶矩和概率密度. 该方法因无需进行误差较大的低阶展开, 而完全克服摄动法因只能进行较低阶次的展开而导致输入随机变量在较大范围波动时, 其相应解的误差较大的缺点. 该方法无需任何假设条件就能准确地求出输出变量的各阶矩, 因而其计算结果的精度和可靠性要明显高于矩方程法. 该方法达到相同计算精度所需要的抽样次数及相关的计算量远小于蒙特卡罗法. 基于如上特点, 该类方法备受数学理论界及工程界的重视 [7–10].

根据基函数系数的计算方法不同, 广义混沌可进一步划分为两类方法: 1) 随机 Galer- kin 法 (stochastic Galerkin method, SGM); 2) 随机配置点法 (stochastic collocation method, SCM).

1) 随机 Galerkin 法 [9]. 该类方法先用由系数待定的正交多项式基函数组成的逼近函数代替输入输出变量间的函数关系, 并将其代入关于输入和输出变量的随机非线性方程组, 然后将该随机非线性方程组转化为确定性的非线性方程组进行求解, 从而得到各基函数的系数以及逼近函数. 该方法无需抽样即可达到很高的计算精度; 但只适用于系统模型相对简单且随机变量数较小的场景.

2) 随机配置点法 [10]. 该类方法首先从原系统获得与输入随机变量的各个抽样点 (即配置点) 对应的输出变量的值, 然后利用这些配置点和相应的函数值计算出各基函数的系数, 从而得到逼近函数. 因为只需要配置点信息而不必考虑系统的具体模型, 所以该类方法适用范围广、计算速度快. 该类方法又可分为插值型随机配置点法和伪谱型随机配置点法 (简称伪谱方法), 其中伪谱方法因为能使逼近函数在输入随机变量定义域内各点的误差总体最小, 所以相对于插值型随机配置点法能获得具有更高逼近精度的逼近函数. 伪谱方法可分为经典伪谱方法 [11] 和自适应稀疏伪谱逼近法 [12, 13](adaptive sparse pseudospectral approximation method). 其中, 经典伪谱方法因为缺乏数值积分规则的选取准则, 所以存在当所用数值积分阶次过低时 (即欠积分) 基函数系数计算不准确, 或所用数值积分阶次过高时 (即过积分) 计算量大的缺点. 而 A-SPAM 法, 又可称为新型伪谱方法, 综合利用了一般化 Smolyak 稀疏网格 [14]、自适应算法 [15] 以及张量积逼近网格与张量积积分规则的配对技术, 从而可获得比经典伪谱方法更高逼近精度的逼近函数. 该方法相对于经典伪谱方法具有如下优点: 1) 该方法由于基函数集形式灵活且可自适应扩展, 所以能够根据给定的计算精度要求自适应地确定逼近函数的展开形式, 从而避免了经典伪谱方法的展开阶次难以选择的问题; 2) 该方法基于张量积逼近网格与张量积积分规则配对的技术, 相应克服了经典伪谱方法因欠积分和过积分而导致的问题, 使得其计算效率更高.

尽管 A-SPAM 具有上述优点, 但该方法仍存在如下缺点: 1) 其终止判据对于当前逼近函数的逼近精度的估计不准确 (大多数情况下偏大), 导致所得逼近函数的逼近精度偏离预期精度; 2) 该方法只适用于单输出随机变量的量化问题, 在把它直接推广到多输出量化问题时, 由于抽样信息没有得到充分利用而使得计算效率偏低.

基于如上综述, 本文提出了适用于多输出量化问题的自适应稀疏伪谱逼近新方法 (new adaptive sparse pseudospectral approximation method for multi-output problems, NA-SPAM-