非稳态奇异系数微分方程的时间间断时空有限元方法*1)

何斯日古楞 李 宏 刘 洋 方志朝
(内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘 要

针对一类二维单轴奇异系数非稳态问题构造了一种时间间断时空有限元格式, 利用以 Radau 点为节点的 Lagrange 插值多项式的特性, 结合有限差分法和有限元法的技巧证明了格式的稳定性和有限元解的时间最大模、空间加权 $L^2(\Omega)$- 模误差估计. 最后列举了一些数值试验结果, 验证了理论结果和格式的可行性.

关键词: 非稳态奇异系数微分方程; 时间间断时空有限元方法; 误差估计

MR (2010) 主题分类: 65M60, 65N30

1. 引 言

奇异系数方程广泛应用在热传导问题、离子体极化现象中的猝灭问题以及概率中描述布朗运动和随机过程等物理问题中 [1]. Arroyo, Bespalov 和 Heuer 在文 [2] 中研究了具有退化和奇异系数的二阶椭圆 Dirichlet 边值问题的有限元法, 并在加权 Sobolev 范数意义下证明了先验误差估计, 通过数值算例验证了理论分析结果. 后来, Bidwell, Hassell 和 Westphal[3] 提出了具有退化和奇异系数的二阶椭圆 Dirichlet 边值问题的一种新型加权最小二乘有限元方法, 并讨论了适当加权 Sobolev 范数意义下的收敛性, 进一步通过数值算例对比了加权格式和未加权格式的收敛性, 从理论和实验说明加权格式能够消除污染效应且实现最优收敛阶. 国内, 陈传淼在文 [4] 中利用 Green 函数证明了奇型两点边值问题有限元解的最大模误差估计超收敛性. 文 [5,6] 分别利用 Green 函数和 Nitsche 技巧及一种辅助函数分析了奇异系数两点边值问题对称有限元格式的最大模误差估计和未加权 $L^2(\Omega)$- 模最优误差估计. 文 [7] 讨论了一维奇异抛物问题的混合有限元方法, 并在奇点附近, 利用变网格步长的处理手段有效地克服了方程奇异性和解的奇异行为对数值计算带来的困难, 得到了较好的数值模拟结果. 更多奇异系数微分方程问题的有限元法研究, 请参见文 [1] 及其参考文献. 近几年, 文 [8-11] 利用时空有限元法求解奇异抛物型方程问题, 并主要是利用文 [12] 的技巧, 即将有限差分和有限元方法相结合的技巧在加权时空模意义下证明了有限元解的最优收敛误差估计. 在此基础上, 本文将时

* 2018 年 7 月 2 日收到.

1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11501311, 11661058, 11761053, 11701299), 内蒙古自然科学基金 (2017MS0107, 2018MS01020), 内蒙古自治区高等学校科学研究项目 (NJZZ18001) 和内蒙古草原英才, 内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划 (NJYT-17-A07) 资助项目.

间间断时空有限元法的应用进一步推广到二维单轴奇异系数非稳态问题 [1]

$$\begin{cases} u_t - \dfrac{1}{x_1^\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(x_1^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x=(x_1,x_2)$, T 是给定常数, $u_0(x)$ 和 $f(x,t)$ 是充分光滑的已知函数, 有界区域 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的正方形区域:

$$\Omega = \{(x_1,x_2)\big|0<x_1<1,\ 0<x_2<1\},$$

用 $\partial\Omega$ 记 Ω 的边界, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1,x_2)\big|(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^2$, $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{(x_1,x_2)\big|x_1 = 0\}$, 显然, $\Gamma_1 = \partial\Omega/\Gamma_0$. 问题 (1.1) 的稳态形式可视为三维 Poisson 方程 $-\Delta u = f$ 的第一边值问题, 当求解区域和数据均满足轴对称条件时, 用柱坐标变换得到的结果 [1,8−10].

本文的基本框架: 第二节给出了一些加权 Sobolve 空间定义、时空格式及其 Radau 数值积分形式和相关引理; 第三节对格式进行了稳定性分析; 第四节利用 Radau 点处的 Lagrange 插值多项式特性, 结合有限差分法和有限元法的技巧证明了有限元解在时间最大模、空间加权 $L^2(\Omega)$- 模误差估计. 最后一节给出了一些数值试验.

2. 相关定义及格式构造

本文除了使用标准 Sobolev 空间 [13,14] 相关范数和内积定义以外, 还需如下加权函数空间及其内积和范数:

定义 1. 设 v 是定义在 Ω 上的可测函数, 则定义加权 $L^2(\Omega)$ 空间 [1]

$$L_\sigma^2(\Omega) = \Big\{v : \int_\Omega x_1^\sigma |v|^2 dx < \infty\Big\},$$

其相应的范数定义为

$$||v||_\sigma = \Big(\int_\Omega x_1^\sigma |v(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \quad v \in L_\sigma^2(\Omega),$$

其中 $x_1^\sigma > 0$ 是权函数.

定义 2. 定义加权 Sobolev 空间 [1]

$$H_\sigma^m(\Omega) = \Big\{v : \frac{d^j v}{dx^j} \in L_\sigma^2(\Omega), 0 \le j \le m\Big\},$$

其相应的范数定义为

$$||v||_{m,\sigma} = \Big(\sum_{j=0}^m ||\frac{d^j v}{dx^j}||_\sigma^2\Big)^{1/2}, \quad \forall v \in H_\sigma^m(\Omega).$$

下面给出问题 (1.1) 的时间间断时空有限元格式. 为此, 首先对时间区间 $[0,T]$ 离散. 设 $0=t^0<t^1<\cdots<t^N=T$, $I_n=(t^n,t^{n+1}], n=0,\cdots,N-1$. $k_n=t^{n+1}-t^n$ 表示时间步长, $k=\max\limits_n k_n$. 定义时空片 $Q^n := \Omega \times I_n$, 并在每个时空片 Q^n 内, 设 $\mathscr{T}_h^n = \{\tau\}$ 是空间区域 Ω